

FACULTAD DE CIENCIAS
GRADO EN FÍSICA
TRABAJO FIN DE GRADO
CURSO ACADÉMICO [2020-2021]

TÍTULO:

AGUJEROS NEGROS DE KERR

AUTOR:

ALBERTO GUILABERT MARTÍNEZ

Resumen

El estudio de los agujeros negros es un campo relativamente reciente en la física, desde que Schwarzschild obtuvo sus soluciones particulares para las ecuaciones de Einstein [43] hasta el estudio más reciente de la ley del área de los agujeros negros [16] han pasado únicamente 105 años. Su estudio nos ha ayudado en gran medida a comprender el universo en el que vivimos y explicar fenómenos que nos parecían inexplicables. Es por esto que en este trabajo se dará una introducción teórica a los agujeros negros sin tratar de perder la rigurosidad necesaria para su estudio, donde además, el trabajo se encuentra distribuido de tal forma que cualquier sección esté relacionada con la anterior, permitiendo así un entendimiento completo de la materia que se expone.

Si bien en relatividad general los agujeros negros están parametrizados únicamente por la masa, el momento angular y la carga, debido a su posible aplicación y su importancia en astrofísica, nos centraremos en el estudio de los agujeros negros que poseen un momento angular distinto de cero. Este tipo de agujero negro recibe el nombre de *agujeros negros de Kerr* debido a que su descubrimiento fue realizado por el matemático Roy Kerr en 1963.

Como se expondrá en la introducción, el trabajo consta de dos bloques principales: en el primer bloque se ha querido dar un desarrollo teórico de cómo se puede obtener la métrica de Kerr a través la búsqueda de unas soluciones generales para espacio-tiempos que cumplan unas características concretas, así como mediante la aplicación de algunas correcciones a una métrica de un espacio-tiempo plano en coordenadas elipsoidales; el segundo bloque, por tanto, se centrará exclusivamente en estudiar las propiedades que se pueden derivar del resultado obtenido. Se estudiarán tanto resultados puramente matemáticos como procesos físicos que se pueden establecer en los agujeros negros en rotación, relacionando también el tema de estudio con otras áreas de la física.

En resumen, el trabajo consiste en una buena introducción teórica y formal al estudio de los agujeros negros que podrá, por ejemplo, servir de herramienta para ayudar a probar su existencia [2] mediante predicciones, así como apoyar la capacidad de descripción del universo que tiene la teoría general de la relatividad.

Abstract

The study of black holes is a relatively recent field in physics, since Schwarzschild obtained his particular solutions to the Einstein equations [43] until the most recent study about the black hole's area law [16] only 105 years have passed. Studying black holes has greatly helped us to understand the universe in which we live and to explain phenomena that seemed unexplained. For this reason, in this work we will give a theoretical introduction to black holes without trying to lose the accuracy necessary for this field. In addition, the work is distributed in such a way that every section is related to the previous one, thus allowing a complete understanding of the matter that is exposed.

Although in general relativity black holes are parameterized only by mass, angular momentum and charge, due to its possible application and its importance in astrophysics, we will focus on the study of black holes with non-zero angular momentum. This type of black holes are called *Kerr's black holes* because they were discovered by the mathematician Roy Kerr in 1963.

As it will be explained in the introduction, the work consists of two main blocks. In the first block, a theoretical development of how the Kerr metric can be obtained is given, which will be done by finding some general solutions for space-times that exhibit some specific characteristics, as well as by applying some corrections to a metric of a flat space-time in ellipsoidal coordinates. Therefore, in the second block we will focus exclusively on studying the properties that can be derived from the result obtained in the previous block. Both purely mathematical results and physical processes that can be established in rotating black holes will be studied, also relating the subject of study to other areas of physics.

In summary, this work consists of a good theoretical and formal introduction to the study of black holes that can be used as a tool to help prove their existence by means of predictions, as well as to support the general theory of relativity's predictability.

Índice

1. Introducción	6
2. Espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico	7
2.1. Soluciones estacionarias axialmente simétricas	8
2.2. Arrastre del marco de inercia	12
3. Métrica de Lense-Thirring	15
4. Una deducción heurística de la métrica de Kerr	21
5. Métrica de Kerr como solución estacionaria axialmente simétrica	25
5.1. Singularidades de curvatura	25
5.2. Singularidades coordenadas	26
5.3. Tipos de espacio-tiempo de Kerr	27
5.4. Bloques de Boyer-Lindquist	28
5.5. Ergosfera	29
5.6. Máquina del tiempo de Carter	31
5.7. Proceso de Penrose	35
6. Integrales de Komar	41
7. Conclusiones	46
A. Cálculo exterior y Dual de Hodge	47
A.1. Preliminares	47
A.2. Producto exterior	47
A.3. Producto interior	48
A.4. Dual de Hodge	48
A.5. Diferencial exterior	49
B. Ecuaciones de Maxwell	49

C. Comparación entre las métricas de Kerr y Lense-Thirring	54
D. Cálculo por ordenador de las ecuaciones de Einstein	54
Referencias	57

1. Introducción

Una vez que Albert Einstein publicó [12] en 1915 la teoría general de la relatividad, donde mostraba que la luz estaría influenciada por la gravedad, tan solo un año después Schwarzschild encontraba una solución particular a sus ecuaciones, sin embargo, estas soluciones introducían puntos *conflictivos* en el espacio-tiempo. Nacía* así el estudio de los agujeros negros, a pesar de que este término se acuñaría años más tarde, en 1969 por John Wheeler.

Posteriormente, en 1963, Kerr encontraba otra solución a las ecuaciones de Einstein [23], esta vez para un espacio-tiempo estacionario con simetría axial. Además, poco tiempo después se probó el teorema de no-pelo, mediante el cual los agujeros negros estarán determinados únicamente por tres cantidades: la masa, el momento angular y la carga eléctrica. Dando así lugar a cuatro posibles agujeros negros diferentes en relatividad general:

	$J = 0$	$J \neq 0$
$Q = 0$	Schwarzschild	Kerr
$Q \neq 0$	Reissner-Nordström	Kerr-Newman

Tabla 1: Posibles combinaciones de los parámetros que determinan un agujero negro.

Si tratamos de aplicar ese enunciado al universo que conocemos, explicando la formación de agujeros negros mediante el colapso de estrellas muy masivas, tendremos que tomar en consideración que debido a que las estrellas rotan, y por tanto tienen un momento angular no nulo, el colapso de estas dará como resultado un objeto que rota debido a la conservación del momento angular. Por otro lado, si se plantea un agujero negro con carga no nula, es posible razonar que estos atraerían carga de signo opuesto y tenderían a *descargarse*. Es por ello que nos hemos centrado en el estudio de la obtención de la métrica de Kerr, así como las propiedades que se observan en un espacio-tiempo de estas características.

Este trabajo está organizado como se sigue:

En primer lugar, se desarrollará una introducción a las soluciones estacionarias y axialmente simétricas, cuyo propósito será obtener una forma de la métrica genérica para este tipo de soluciones. Además, se relacionará este resultado con el arrastre del marco de inercia, así como también se definirá el formalismo de las tétradas.

*En realidad, ya en 1784, John Michell ya había propuesto la idea de que un objeto fuera lo suficientemente denso como para que la luz no pudiera escapar de él, véase [34].

A continuación y en relación con el apartado anterior, se planteará el estudio de la métrica de Lense-Thirring como aproximación a un caso de rotación lenta y de gravedad débil, y partiendo de este resultado se deducirá finalmente la métrica de Kerr a través una pequeña corrección, calculada mediante *Python*, cerrando así el primer gran bloque del trabajo.

Por otra parte, una vez definida la métrica de Kerr, nos centraremos en el estudio de sus características. Definiremos cuáles son sus singularidades de curvatura y cuáles son singularidades coordenadas, obteniendo así los horizontes de eventos. A pesar de que a raíz de esto se podrán determinar tres tipos de espacio-tiempo dependiendo del valor del momento angular, en este trabajo nos centraremos únicamente en un espacio-tiempo concreto. Una vez determinados los horizontes de un agujero negro de Kerr, es conveniente para el posterior estudio dividir este espacio-tiempo resultante en bloques, conocidos como bloques de Boyer-Lindquist. En concreto, se estudiará la ergosfera y ciertas características de esta región, así como se introducirá la máquina del tiempo de Carter, donde se probará la existencia de curvas cerradas de tipo tiempo.

Además, se mostrará detalladamente el proceso de Penrose, mediante el cual se permite extraer energía de un agujero negro de Kerr, así como se puede determinar una masa irreducible. Este último aspecto da lugar a una clara relación con las leyes de la termodinámica, y por tanto se dará una breve introducción a la mecánica de los agujeros negros. Debido a esta relación, se definirán detalladamente las cantidades conservadas mediante las integrales de Komar, tanto la masa de Komar como el momento angular de Komar, y se probará que ambas cantidades coinciden, en un espacio-tiempo de Kerr, con la masa y el momento angular respectivamente.

Por último, se desarrollarán algunas conclusiones que ayuden a comprender la importancia de los resultados obtenidos, así como los posibles estudios que se pueden llevar a cabo como continuación de este trabajo. Con lo anteriormente descrito y con el contenido que se expondrá más adelante, se aporta una buena introducción al campo de estudio de los agujeros negros de Kerr bajo la teoría de la relatividad general.

2. Espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico

Para comprender las soluciones a las ecuaciones de Einstein que son simétricas y las que poseen una simetría axial será necesario definir, en primer lugar, en qué consiste y de donde proviene el concepto de campo vectorial de Killing y cómo una base coordenada donde aparezcan estos vectores afectará a la forma de la métrica. Por otra parte, se definirá

en qué consiste que una variedad pseudo-Riemanniana sea conformemente plana y con ello se obtendrá la forma general de la métrica para este tipo de soluciones.

2.1. Soluciones estacionarias axialmente simétricas

Definición 2.1. Se define un **grupo uniparamétrico de difeomorfismos** ϕ_t sobre una variedad M como una aplicación de clase C^∞

$$\phi_t : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

de manera que para un $t \in \mathbb{R}$ fijo, $\phi_t : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo, y además cumple que $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

Proposición 2.2. Dado un grupo uniparamétrico de difeomorfismos ϕ_t , si $t = 0$ entonces ϕ_t es la aplicación identidad.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la definición anterior, ya que se tiene $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} = \phi_s$, y por tanto $\phi_{t=0} \equiv 1$. \square

Proposición 2.3. Dado $p \in M$ fijo, entonces $\phi_t(p) : \mathbb{R} \rightarrow M$ es una curva, conocida como **órbita** de ϕ_t , que pasa por p si $t = 0$ (proposición 2.2). Definiendo $v|_{\phi_t(p)}$ tangente a la curva, tendremos asociado un campo vectorial a un grupo de transformaciones de M . Es decir, dado ϕ_t un grupo uniparamétrico de difeomorfismos, se le puede asociar un campo vectorial $v|_{\phi_t(p)}$. Por tanto ϕ_t puede ser generado a partir de un campo vectorial.

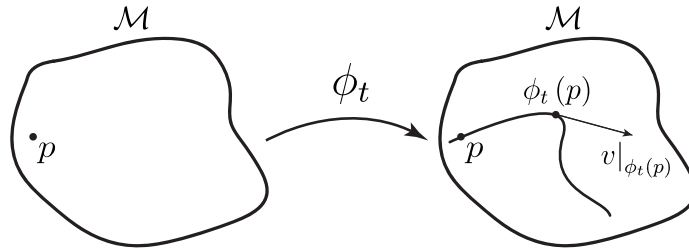


Figura 1: Esquema de la proposición 2.3.

Definición 2.4. Si se tiene $\phi_t : M \rightarrow M$ un grupo uniparamétrico de difeomorfismos y $v \equiv v|_{\phi_t(p)}$ el campo vectorial que lo genera, se dice que ϕ_t es un **grupo de isometrías** si $\mathcal{L}_v g_{\alpha\beta} = 0$, donde \mathcal{L}_v simboliza la derivada de Lie a lo largo de v y $g_{\alpha\beta}$ las componentes covariantes del tensor métrico.

Definición 2.5. Si $\phi_t : M \rightarrow M$ es un grupo uniparamétrico de isometrías, entonces el campo vectorial que lo genera se denomina **campo vectorial de Killing**.

Definición 2.6. Se dice que un espacio-tiempo es **estacionario** si existe un grupo de isometrías uniparamétricas σ_t cuyas órbitas sean curvas temporales completas. Es decir, que todo espacio-tiempo estacionario tiene un vector de Killing temporal.

Definición 2.7. Se dice que un espacio-tiempo es **axialmente simétrico** si existe un grupo de isometrías uniparamétricas χ_ϕ cuyas órbitas sean curvas espaciales completas. Es decir, que todo espacio-tiempo axialmente simétrico tiene un vector de Killing espacial.

Definición 2.8. Un espacio-tiempo se denomina estacionario y axialmente simétrico si posee ambas simetrías y además σ_t y χ_ϕ conmutan. O de otra manera, si los vectores ξ^α y ψ^α que generan ambos grupos de isometrías conmutan.

$$[\xi, \psi] = 0 \quad (1)$$

Proposición 2.9. Si ξ y ψ son vectores de Killing que conmutan podemos tomar un sistema de coordenadas $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ tal que $\xi^\alpha = (\partial/\partial x^0)^\alpha$ y $\psi^\alpha = (\partial/\partial x^1)^\alpha$ sean vectores coordinados.

Demostración. La prueba es inmediata teniendo en cuenta la conmutatividad de las derivadas parciales. \square

Teorema 2.10. Dado en un sistema de coordenadas $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, si se tienen dos vectores de Killing $\xi^\alpha = (\partial/\partial x^0)^\alpha$ y $\psi^\alpha = (\partial/\partial x^1)^\alpha$, entonces la forma de la métrica es

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^2, x^3) dx^\alpha dx^\beta \quad (2)$$

Demostración. Partiendo de la expresión de la derivada de Lie de un tensor en un sistema de coordenadas tal que $\xi^\alpha = (\partial/\partial x^0)^\alpha$

$$\mathcal{L}_\xi T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_m} = \frac{\partial T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_m}}{\partial x^0} \quad (3)$$

se tendrá que, para el caso del tensor métrico

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} \quad (4)$$

Como ξ^α es un vector de Killing, por la definición 2.4 cumple que $\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = 0$, y por tanto

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = 0 \quad (5)$$

El procedimiento es equivalente para x^1 . Con esto queda demostrado que el tensor métrico será independiente de x^0 y x^1 . \square

Corolario 2.11. *El recíproco de teorema 2.10 también será cierto, si la métrica es independiente de una de las coordenadas, entonces existe un vector de Killing asociado a esta.*

Proposición 2.12. *Sea un espacio-tiempo con tensor métrico $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^2, x^3)$ e invariante bajo la transformación $(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (-x^0, -x^1, x^2, x^3)$, entonces la forma más general de esta métrica es*

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{01} dx^0 dx^1 + g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + 2g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33} (dx^3)^2 \quad (6)$$

Demostración. Tomando la matriz asociada al cambio de coordenadas $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow \bar{x} = (-x^0, -x^1, x^2, x^3)$

$$\Lambda_{\alpha}^{\bar{\alpha}} = \text{diag}(-1, -1, 1, 1) \quad (\alpha, \bar{\alpha} = 0, 1, 2, 3) \quad (7)$$

$$\Lambda_{\bar{\alpha}}^{\alpha} = (\Lambda_{\alpha}^{\bar{\alpha}})^{-1} = \Lambda_{\alpha}^{\bar{\alpha}}$$

donde α hace referencia a las componentes de x y $\bar{\alpha}$ a las de \bar{x} . Aplicando esta transformación de coordenadas al tensor métrico, y teniendo en cuenta su simetría, se tiene

$$\begin{aligned} g_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} &= (\Lambda_{\bar{\alpha}}^{\alpha})^2 g_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha} \\ g_{\bar{0}\bar{1}} &= \Lambda_{\bar{0}}^{\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\bar{1}}^{\beta} = \Lambda_{\bar{0}}^0 g_{01} \Lambda_{\bar{1}}^1 = g_{01} \\ g_{\bar{2}\bar{3}} &= \Lambda_{\bar{2}}^{\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\bar{3}}^{\beta} = \Lambda_{\bar{2}}^2 g_{23} \Lambda_{\bar{3}}^3 = g_{23} \\ g_{\bar{i}\bar{j}} &= \Lambda_{\bar{i}}^{\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\bar{j}}^{\beta} = \Lambda_{\bar{i}}^i g_{ij} \Lambda_{\bar{j}}^j = -g_{ij} \quad \text{con } i = 0, 1 \text{ y } j = 2, 3 \end{aligned} \quad (8)$$

Como se ha impuesto que permanezca invariante, entonces $g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0$ necesariamente. \square

Definición 2.13. *Se dice que una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) es **conformemente plana** si cada punto p la variedad tiene una carta (U, φ) que contiene a p tal que $g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \delta_{\mu\nu}$*

Teorema 2.14. *Cualquier variedad pseudo-Riemanniana en 2 dimensiones es conformemente plana.*

Demostración. Sean (x, y) las coordenadas locales con las cuales la métrica se puede escribir de la forma

$$ds^2 = g_{xx}dx^2 + 2g_{xy}dxdy + g_{yy}dy^2 \quad (9)$$

y definamos $g \equiv g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2$, por tanto podemos escribir la expresión anterior como

$$ds^2 = \left(\sqrt{g_{xx}}dx + \frac{g_{xy} + i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{xx}}}dy \right) \left(\sqrt{g_{xx}}dx + \frac{g_{xy} - i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{xx}}}dy \right) \quad (10)$$

existe un factor integrante de la forma $\lambda(x, y) = \lambda_1(x, y) + i\lambda_2(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda \left(\sqrt{g_{xx}}dx + \frac{g_{xy} + i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{xx}}}dy \right) &= du + idv \\ \lambda \left(\sqrt{g_{xx}}dx + \frac{g_{xy} - i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{xx}}}dy \right) &= du - idv \end{aligned} \quad (11)$$

Por tanto $ds^2 = (du^2 + dv^2) / |\lambda|^2$, y tomando $|\lambda|^2 = e^{2\sigma}$ se llega a la expresión buscada. \square

Teorema 2.15. *La métrica en un espacio estacionario y axialmente simétrico se puede escribir como*

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\psi}(d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu_2}(dx^2)^2 + e^{2\mu_3}(dx^3)^2 \quad (12)$$

siendo t la coordenada asociada al vector coordenado $\xi^\alpha = (\partial/\partial x^0)^\alpha$ y ϕ la asociada al vector coordenado $\psi^\alpha = (\partial/\partial x^1)^\alpha$, donde ξ^α es un vector de Killing temporal y ψ^α es un vector de Killing espacial.

Demostración. Partiendo de la expresión de la métrica dada en la proposición 2.12

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 \\ &\quad + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^3)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

y aplicando el resultado obtenido en el teorema 2.14 se tiene que

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 + e^{2\mu_2}(dx^2)^2 + e^{2\mu_3}(dx^3)^2 \quad (14)$$

Veamos que la parte (x^0, x^1) de la métrica se puede reagrupar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 &= \\ &= \frac{g_{00}g_{11} + g_{01}^2 - g_{01}^2}{g_{11}}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 \\ &= \frac{g_{00}g_{11} - g_{01}^2}{g_{11}}(dx^0)^2 + \frac{g_{01}^2}{g_{11}}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g_{00}g_{11} - g_{01}^2}{g_{11}} (dx^0)^2 + g_{11} \left(\frac{g_{01}^2}{g_{11}^2} (dx^0)^2 + 2\frac{g_{01}}{g_{11}} dx^0 dx^1 + (dx^1)^2 \right) \\
&= \frac{g_{00}g_{11} - g_{01}^2}{g_{11}} (dx^0)^2 + g_{11} \left(\frac{g_{01}}{g_{11}} dx^0 + dx^1 \right)^2
\end{aligned}$$

Tomando $e^{2\psi} = g_{11}$ y $\omega = -\frac{g_{01}}{g_{11}}$ como funciones de x^2 y x^3 (ver teorema 2.10), entonces

$$g_{00}dt^2 + g_{01}dtd\phi + g_{11}d\phi^2 = (g_{00}g_{11} - g_{01}^2) e^{-2\psi} dt^2 + e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 \quad (16)$$

Si ahora se define $e^{2\delta}$ como el menos-determinante de la parte (x^0, x^1) de la métrica

$$e^{2\delta} = - (g_{00}g_{11} - g_{01}^2) = g_{01}^2 - g_{00}g_{11} \quad (17)$$

Identificando la coordenada $x^0 = t$ como la coordenada asociada al vector de Killing temporal ξ^α y $x^1 = \phi$ como la coordenada asociada al vector de Killing espacial ψ^α , entonces claramente no hay problemas en la definición de $e^{2\delta}$ ni de $e^{2\psi}$ debido a que estamos en un espacio tiempo estacionario y axialmente simétrico[†], por tanto se tendrá $g_{00} = \xi^\alpha \xi_\alpha < 0$ y $g_{11} = \psi^\alpha \psi_\alpha > 0$. Para simplificar las expresiones tomemos $\nu = \delta - \psi$

$$-e^{2(\delta-\psi)} dt^2 + e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 \quad (18)$$

Juntando ambas partes se obtiene finalmente la expresión buscada. \square

Como se puede observar en la expresión (12), en este tipo de métrica se tendrá un término cruzado $dtd\phi$ fuera de la diagonal, lo cual puede sugerir la existencia de una *velocidad angular*. En el siguiente apartado se estudiará este fenómeno con mayor detalle.

2.2. Arrastre del marco de inercia

En primer lugar introduzcamos un formalismo que nos facilite el estudio de este fenómeno: el formalismo de las tétradas, descrito a continuación.

Definición 2.16. *Podemos establecer en cada punto del espacio-tiempo una base de cuatro vectores contravariantes expresados como*

$$e_{(a)}^\alpha \quad (a = 1, 2, 3, 4) \quad (19)$$

y asociado a cada vector contravariante habrá asociado un vector covariante

$$e_{(a)\alpha} = g_{\alpha\beta} e_{(a)}^\beta \quad (20)$$

[†]No hay que confundir el vector de Killing espacial ψ^α con la función $\psi = \psi(x^2, x^3)$.

Además, definimos también la inversa $e_{\alpha}^{(b)}$ de la matriz $e_{(a)}^{\alpha}$ tal que

$$e_{(a)}^{\alpha} e_{\alpha}^{(b)} = \delta_{(a)}^{(b)} \quad e_{(a)}^{\alpha} e_{\beta}^{(a)} = \delta_{(\beta)}^{(\alpha)} \quad (21)$$

Asumiremos también que se debe cumplir la relación

$$e_{(a)}^{\alpha} e_{(b)\alpha} = \eta_{(a)(b)} \quad (22)$$

donde $\eta_{(a)(b)}$ es una matriz simétrica constante[‡].

Notación 2.17. Es conveniente distinguir entre los índices de las tétradas de los índices de tensores, por eso utilizaremos letras del alfabeto latino entre paréntesis para los índices de las tétradas, así como letras del alfabeto griego para los índices tensoriales.

Tomando la métrica dada en 2.15 y siguiendo la definición anterior podemos definir la tétrada

$$\begin{aligned} e_{(0)\alpha} &= (-e^{\nu}, 0, 0, 0) \\ e_{(1)\alpha} &= (-\omega e^{\psi}, e^{\psi}, 0, 0) \\ e_{(2)\alpha} &= (0, 0, e^{\mu_2}, 0) \\ e_{(3)\alpha} &= (0, 0, 0, e^{\mu_3}) \end{aligned} \quad (23)$$

y, en consecuencia, para que se cumpla la relación (19) se tendrá

$$\begin{aligned} e_{(0)}^{\alpha} &= (e^{-\nu}, \omega e^{-\nu}, 0, 0) \\ e_{(1)}^{\alpha} &= (0, e^{-\psi}, 0, 0) \\ e_{(2)}^{\alpha} &= (0, 0, e^{-\mu_2}, 0) \\ e_{(3)}^{\alpha} &= (0, 0, 0, e^{-\mu_3}) \end{aligned} \quad (24)$$

tal que $e_{(a)}^i e_{i(b)} = \eta_{(a)(b)}$. En este marco de referencia estaremos en un sistema localmente inercial. Consideremos ahora un punto cualquiera del espacio-tiempo con parámetro afín s , con una 4-velocidad dada por

$$u^0 = \frac{dt}{ds} = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad u^1 = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{ds} = \Omega u^0, \quad u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds} = \frac{dx^{\alpha}}{dt} \frac{dt}{ds} = v^{\alpha} u^0 \quad (25)$$

para $\alpha = 2, 3$, y donde

$$V = e^{2\psi-2\nu} (\Omega - \omega)^2 + e^{2\mu_2-2\nu} (v^2)^2 + e^{2\mu_3-2\nu} (v^3)^2 \quad (26)$$

Este mismo punto tendrá, en el sistema de referencia inercial, una cuadvirvelocidad dada por

$$u^{(a)} = e_{\alpha}^{(a)} u^{\alpha} = \eta^{(a)(b)} e_{(b)\alpha} u^{\alpha} \quad (27)$$

[‡]En nuestro caso será la matriz asociada a la métrica de Minkowski.

con lo cual se obtiene

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}, \quad u^1 = \frac{e^{\psi-\nu}(\Omega - \omega)}{\sqrt{1-V^2}}, \quad u^\alpha = \frac{e^{\mu_\alpha-\nu}v^\alpha}{\sqrt{1-V^2}} \quad (\alpha = 2, 3) \quad (28)$$

Como se puede ver, un punto que se considera en reposo en el marco de referencia inercial, es decir que $u^1 = u^2 = u^3 = 0$, tendrá asignada una velocidad angular ω en el sistema coordenado. En este sentido, se dice que ω describe un arrastre del marco de inercia. Este efecto provocará que aparezca una precesión sobre los cuerpos que orbiten alrededor.

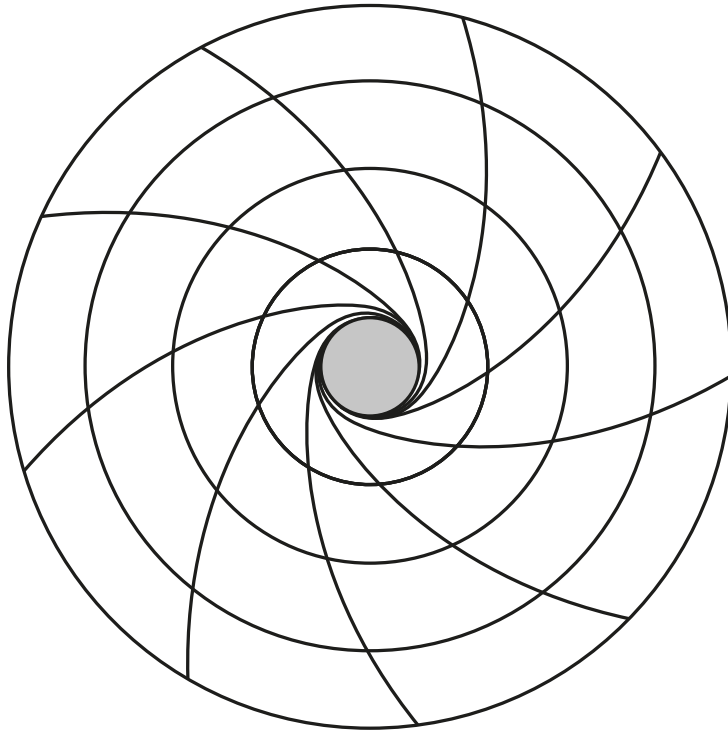


Figura 2: Esquema que representa el arrastre del marco de inercia entorno a un cuerpo en rotación (en gris).

Como consecuencia del resultado obtenido, lo más coherente será seguir analizando este tipo de métricas con el estudio de la métrica de Lense-Thirring, que nos permitirá entender el comportamiento de un espacio-tiempo bajo una aproximación de rotación lenta y de gravedad débil, lo cual implica la posibilidad de linealizar las ecuaciones de Einstein.

3. Métrica de Lense-Thirring

En esta aproximación se están ignorando los efectos del propio cuerpo sobre sí mismo, es decir, se trata de un sistema aislado con una gravedad lo *suficientemente* débil. Es importante recalcar que no se imponen restricciones del tipo newtoniano, ya que las velocidades pueden ser próximas a las de la luz, así como es posible comparar diferentes componentes del tensor de energía-momento, a diferencia de lo que ocurre en el límite newtoniano.

Definición 3.1. *En la aproximación de campo gravitatorio débil, la métrica se puede escribir como*

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad (29)$$

donde $\eta_{\alpha\beta}$ es la métrica de Minkowski y $h_{\alpha\beta}$ una corrección.

Proposición 3.2. *El tensor energía-momento $T_{\alpha\beta}$ cumple, en la aproximación del campo débil,*

$$T^{00} = T_{00}, \quad T^{\mu 0} = -T_{\mu 0}, \quad T^{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (30)$$

Demostración. Partiendo de la definición 3.1 la métrica se puede escribir de la forma

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + \bar{h}^{\alpha\beta} \quad (31)$$

con $\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h\eta^{\alpha\beta}$, y conociendo las ecuaciones de Einstein linealizadas

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \Rightarrow T_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} \square \bar{h}_{\mu\nu} \quad (32)$$

Entonces el tensor energía-momento en coordenadas contravariantes

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \bar{g}^{\alpha\mu} \bar{g}^{\beta\nu} \left(-\frac{1}{16\pi} \square \bar{h}_{\mu\nu} \right) \\ &= -(16\pi)^{-1} (\eta^{\alpha\mu} + \bar{h}^{\alpha\mu}) (\eta^{\beta\nu} + \bar{h}^{\beta\nu}) \square \bar{h}_{\mu\nu} \\ &= -(16\pi)^{-1} (\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\alpha\mu} \bar{h}^{\beta\nu} + \bar{h}^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} + O(h^2)) \square \bar{h}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (33)$$

como $\eta^{\alpha\mu} \bar{h}^{\beta\nu} \square \bar{h}_{\mu\nu}$ y $\bar{h}^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \square \bar{h}_{\mu\nu}$ son restos de orden $O(h^2)$ entonces

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{16\pi} \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \square \bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} T_{\mu\nu} \quad (34)$$

En general, para subir y bajar índices en la aproximación de campo débil se utiliza la métrica de Minkowski. \square

Proposición 3.3. *En el gauge de Lorentz, $\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$, se tiene que*

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (35)$$

Demostración. Calculando los símbolos de Christoffel para la aproximación de campo débil se tiene

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}(\bar{h}_{\mu\beta,\gamma} + \bar{h}_{\mu\gamma,\beta} - \bar{h}_{\beta\gamma,\mu}) + O(\bar{h}^2) \quad (36)$$

Como $\bar{h}_{\mu\beta} = \eta_{\lambda\mu}\eta_{\sigma\beta}\bar{h}^{\lambda\sigma}$ y $\eta_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ entonces

$$\bar{h}_{\mu\beta,\gamma} = \eta_{\lambda\mu}\eta_{\sigma\beta}\bar{h}^{\lambda\sigma}_{,\gamma} \quad (37)$$

Al estar en el gauge de Lorentz, entonces $\bar{h}_{\mu\beta,\gamma} = \bar{h}_{\mu\gamma,\beta} = \bar{h}_{\beta\gamma,\mu} = 0$, y por tanto los símbolos de Christoffel se anulan

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0 \quad (38)$$

La conservación del tensor energía-momento viene dada por la expresión

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (39)$$

y desarrollando la derivada covariante

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = T_{,\nu}^{\mu\nu} + T^{\alpha\nu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} + T^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} = T_{,\nu}^{\mu\nu} \quad (40)$$

debido a que los símbolos de Christoffel en este gauge son cero. \square

Teorema 3.4. *La métrica de un espacio-tiempo en la aproximación de campo gravitatorio débil y de rotación lenta se puede escribir como*

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \right] dt^2 - \left[4\epsilon_{jkl}S^k \frac{x^l}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \right] dt dx^j + \left[\left(1 + \frac{2M}{r} \right) \delta_{jk} + \left(\begin{array}{c} \text{Radiación gravitatoria que} \\ \text{se atenúa como } O(1/r) \end{array} \right) \right] dx^j dx^k \quad (41)$$

Demostración. Las ecuaciones de Einstein linealizadas en el gauge de Lorentz $\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ se escriben como

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16T_{\mu\nu} \quad (42)$$

donde se han tomado unidades geometrizadas. Por tanto, las soluciones serán de la forma

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 4 \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (43)$$

Si nos situamos lo suficientemente lejos de la fuente, se puede expandir $\bar{h}_{\mu\nu}$ en términos de \mathbf{x}'/r :

$$T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} T_{\mu\nu}(t - r, \mathbf{x}') \right] (r - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)^n \quad (44)$$

$$r - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = x^j \left(\frac{x^{j'}}{r} \right) + \frac{1}{2} \frac{x^j x^k}{r} \left(\frac{x^{j'} x^{k'} - r' \delta_{jk}}{r^2} \right) + \dots \quad (45)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{x^j x^{j'}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{x^j x^k}{r^3} \frac{(3x^{j'} x^{k'} - r'^2 \delta_{jk})}{r^2} + \dots \quad (46)$$

Con lo cual las soluciones serán

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} = 4 \int d^3 x' & \left[\frac{1}{r} + \frac{x^j x^{j'}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{x^j x^k (3x^{j'} x^{k'} - r'^2 \delta_{jk})}{r^5} + \dots \right] \\ & \times \left[T_{\mu\nu}(t - r, \mathbf{x}') + x^j \frac{x^{j'}}{r} \frac{\partial T_{\mu\nu}(t - r, \mathbf{x}')}{\partial t} + \dots \right] \end{aligned} \quad (47)$$

Para hacer un desarrollo más ordenado, calculemos en primer lugar la componente \bar{h}_{00} hasta orden $O(1/r^3)$. Únicamente tomaremos los valores $n = 0$ y $n = 1$,

$$\bar{h}_{00} = \frac{4}{r} \underbrace{\int T_{00}(t - r, \mathbf{x}') d^3 x'}_{n=0} + 4 \frac{x^j}{r^2} \underbrace{\int x^{j'} T_{00,0} d^3 x'}_{n=1} \quad (48)$$

Si se define la masa como

$$M = \int T^{00}(t - r, \mathbf{x}') d^3 x' \quad (49)$$

entonces aplicando la proposición 3.2

$$\frac{4}{r} \int T_{00}(t - r, \mathbf{x}') d^3 x' = \frac{4}{r} \int T^{00}(t - r, \mathbf{x}') d^3 x' = \frac{4M}{r} \quad (50)$$

Para la segunda integral, como estamos en el gauge $\bar{h}_{,\nu}^{\mu\nu} = 0$ utilizando la proposición 3.3 se tendrá que

$$T_{,0}^{00} + T_{,i}^{0i} = T_{00,0} + T_{,i}^{0i} = 0 \Rightarrow T_{00,0} = -T_{,i}^{0i} \quad (51)$$

con lo cual

$$4 \frac{x^j}{r^2} \int x^{j'} T_{,0}^{00} d^3 x' = -4 \frac{x^j}{r^2} \int x^{j'} T_{,i}^{0i}(t - r, \mathbf{x}') d^3 x' = 4 \frac{x^j}{r^2} \int x^{j'} T^{0i}(t - r, \mathbf{x}') d^3 x' \quad (52)$$

Teniendo en cuenta que con el origen de coordenadas en el centro de masas se cumple

$$P^j \equiv \int T^{0j} d^3 x = 0 \quad (53)$$

Con lo cual la expresión (52) se anula. Calculemos ahora las componentes \bar{h}_{0i} , de nuevo tomaremos únicamente los valores $n = 0, n = 1$ del desarrollo, pero ahora hasta un orden $O(1/r^4)$, por tanto la integral será

$$\bar{h}_{0i} = \frac{4}{r} \int T_{0i} d^3 x' + 4 \frac{x^j}{r^2} \int x^{j'} T_{0i,0} d^3 x' + 4 \frac{x^j}{r^3} \int x^{j'} T_{0i} d^3 x' \quad (54)$$

La primera integral es claramente el momento total, y como estamos en el centro de masas será cero. Antes de calcular el término que decrece como r^2 veamos el valor de la tercera integral. Partiendo de la definición de momento angular

$$S^k = \int \epsilon_{ijk} x^j T^{i0} d^3x \quad (55)$$

se tiene que[§]

$$\epsilon^{klm} S_k = \epsilon^{klm} \epsilon_{ijk} \int x^j T^{0i} d^3x \quad (56)$$

Donde el producto de las epsilon de Levi-Civita es

$$\epsilon^{klm} \epsilon_{ijk} = \epsilon^{klm} \epsilon_{kij} = (\delta_i^l \delta_j^m - \delta_j^l \delta_i^m) \quad (57)$$

y en consecuencia

$$\epsilon^{klm} S_k = (\delta_i^l \delta_j^m - \delta_j^l \delta_i^m) \int x^j T^{0i} d^3x = \int x^m T^{0l} d^3x - \int x^l T^{0m} d^3x \quad (58)$$

Introduciendo la notación para los tensores simétricos y antisimétricos y la propiedad de su descomposición en la suma de estos se obtiene

$$\epsilon^{klm} S_k = 2 \int x^{[m} T^{0l]} d^3x \quad (59)$$

Tomando ahora la definición de momento cuadrupolar

$$I^{ij} = \int x^i x^j T^{00} d^3x \quad (60)$$

se tiene que su derivada respecto a la componente x^0 , que se notará como \dot{I}^{ij}

$$\dot{I}^{ij} = \left(\int x^i x^j T^{00} d^3x \right)_{,0} = \int x^i x^j T_{,0}^{00} d^3x \quad (61)$$

que cumplirá

$$\dot{I}^{ij} = - \int x^i x^j T_{,k}^{0k} d^3x = \int (x_{,k}^i x^j T^{0k} + x^i x_{,k}^j T^{0k}) d^3x \quad (62)$$

Claramente las derivadas del tipo $x_{,k}^i$ son deltas de Dirac, de modo que

$$\int (x_{,k}^i x^j T^{0k} + x^i x_{,k}^j T^{0k}) d^3x = \int (\delta_k^i x^j T^{0k} + x^i \delta_k^j T^{0k}) d^3x = \int (x^j T^{0i} + x^i T^{0j}) d^3x \quad (63)$$

[§]Los índices i, j, k representan las componentes de tensores tal que $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Con lo cual finalmente

$$\dot{I}^{ij} = 2 \int x^{(j} T^{0i)} d^3x \quad (64)$$

Además, como

$$\int x^{(j} T^{0i)} d^3x + \int x^{[j} T^{0i]} d^3x = \int x^j T^{0i} d^3x \quad (65)$$

entonces

$$4 \frac{x^j}{r^3} \int x^{j'} T_{0i} d^3x' = -4 \frac{x^j}{r^3} \int x^{j'} T^{0i} d^3x' = -2 \epsilon_{kji} S^k \frac{x^j}{r^3} + 2 \dot{I}_{ij} \frac{x^j}{r^2} \quad (66)$$

Para la segunda integral, se puede apreciar como es la derivada respecto a la componente x^0 de la que acabamos de obtener, ya que al no depender las componentes x^j de x^0 se podrá escribir

$$4 \frac{x^j}{r^2} \int x^{j'} T_{0i,0} d^3x' = 4 \frac{x^j}{r^2} \left(\int x^{j'} T_{0i} d^3x' \right)_{,0} = -2 \epsilon_{kji} \dot{S}^k \frac{x^j}{r^3} + 2 \ddot{I}_{ij} \frac{x^j}{r^2} \quad (67)$$

Si imponemos la conservación del momento angular, el término con \dot{S}^k debe ser cero, con lo que finalmente, despreciando los términos de radiación

$$\bar{h}_{0i} = -2 \epsilon_{ikj} S^k \frac{x^j}{r^3} \quad (68)$$

Por último, para los términos \bar{h}_{ij} tomaremos únicamente el término de menor orden

$$\bar{h}_{ij} = \frac{4}{r} \int T_{ij} d^3x' \quad (69)$$

donde obtendremos $\bar{h}_{ij} \propto \ddot{I}_{ij}$, y despreciando nuevamente los términos radiativos se obtiene que la traza es

$$\bar{h} = -\frac{4M}{r} \quad (70)$$

con lo cual, la corrección a la métrica de Minkowski será

$$h_{00} = \frac{2M}{r}, \quad h_{0i} = -2 \epsilon_{ikj} S^k \frac{x^j}{r^3}, \quad h_{ij} = \frac{2M}{r} \quad (71)$$

□

Corolario 3.5. *Suponiendo, sin pérdida de generalidad, el eje de rotación a lo largo del eje z , y que la métrica es invariante bajo el cambio $(t \rightarrow -t, \phi \rightarrow -\phi)$ en coordenadas esféricas, la métrica dada en el teorema 3.4 se puede expresar como*

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \frac{4aM}{r} \sin^2 \theta dt d\phi + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) d\sigma^2 \quad (72)$$

donde la constante de integración, a , es el momento angular por unidad de masa y $d\sigma^2$ el elemento de línea en coordenadas esféricas.

Demostración. En primer lugar desarrollemos la métrica en coordenadas cartesianas. Para los términos fuera de la diagonal se tiene

$$-\frac{4}{r^3}\epsilon_{jkl}S^kx^ldtdx^j = -\frac{4}{r^3}dt(\epsilon_{1kl}S^kx^ldx^1 + \epsilon_{2kl}S^kx^ldx^2 + \epsilon_{3kl}S^kx^ldx^3) \quad (73)$$

Teniendo en cuenta que si $k = l$ entonces $\epsilon_{ikk} = 0$ entonces

$$\begin{aligned} -\frac{4}{r^3}\epsilon_{jkl}S^kx^ldtdx^j &= -\frac{4}{r^3}dt[(\epsilon_{123}S^2x^3 + \epsilon_{132}S^3x^2)dx^1 \\ &\quad + (\epsilon_{213}S^1x^3 + \epsilon_{231}S^3x^1)dx^2 \\ &\quad + (\epsilon_{312}S^1x^2 + \epsilon_{321}S^2x^1)dx^3] \end{aligned} \quad (74)$$

y sustituyendo los valores de la épsilon de Levi-Civita

$$\begin{aligned} -\frac{4}{r^3}\epsilon_{jkl}S^kx^ldtdx^j &= -\frac{4}{r^3}dt[(S^2x^3 - S^3x^2)dx^1 \\ &\quad + (-S^1x^3 + S^3x^1)dx^2 \\ &\quad + (S^1x^2 - S^2x^1)dx^3] \end{aligned} \quad (75)$$

Si suponemos que el eje de rotación es el eje z y definimos $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$, entonces $S^1 = S^2 = 0$, y definiendo $S^3 = J$ se tendrá

$$-\frac{4}{r^3}dt[-S^z y dx + S^z x dy] = -\frac{4J}{r^3}(x dy - y dx) \quad (76)$$

Tomando el cambio a coordenadas esféricas se llega a

$$\begin{aligned} &-\frac{4J}{r^3}[r \sin \theta \cos \phi (dr \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) \\ &\quad - r \sin \theta \sin \phi (dr \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi)] dt \end{aligned} \quad (77)$$

Si ahora imponemos que la métrica debe ser invariante bajo el cambio $(t \rightarrow -t, \phi \rightarrow -\phi)$, entonces necesariamente los únicos términos distintos de cero serán los multiplicados por $dtd\phi$ (ver proposición 2.12). Es decir

$$-\frac{4J}{r^3}(r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi) dtd\phi = -\frac{4J}{r} \sin^2 \theta dtd\phi \quad (78)$$

y definiendo $a = J/M$ como el momento angular por unidad de masa

$$-\frac{4aM}{r} \sin^2 \theta dtd\phi \quad (79)$$

Para los términos de la diagonal, exceptuando la componente temporal,

$$\left(1 + \frac{2M}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (80)$$

Si transformamos estas componentes a coordenadas esféricas

$$g_{rr} = \frac{\partial x^i}{\partial r} \frac{\partial x^j}{\partial r} g_{ij} = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 g_{xx} + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 g_{yy} + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 g_{zz} \quad (81)$$

como $g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = (1 + 2M/r)$ entonces

$$g_{rr} = (\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta) \left(1 + \frac{2M}{r} \right) = \left(1 + \frac{2M}{r} \right) \quad (82)$$

Ahora, para $g_{\theta\theta}$ se tiene

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{2M}{r} \right) \\ &= (r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta) \left(1 + \frac{2M}{r} \right) \\ &= r^2 \left(1 + \frac{2M}{r} \right) \end{aligned} \quad (83)$$

y por último

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{2M}{r} \right) \\ &= (r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(1 + \frac{2M}{r} \right) \\ &= r^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{2M}{r} \right) \end{aligned} \quad (84)$$

Obteniendo así el resultado buscado. □

4. Una deducción heurística de la métrica de Kerr

En concordancia con el resultado anterior, se puede comprobar como nuevamente obtenemos un término asociado a un arrastre del marco de inercia propio de la simetría axial. Este término aparecerá del mismo modo si se trabaja con coordenadas elipsoidales, es por esto que podremos obtener la métrica de Kerr tomando unas correcciones que se mostrarán a lo largo de esta sección.

Proposición 4.1. *La métrica de Lense-Thirring dada en el corolario 3.5 se puede expresar a primer orden en la constante de integración, a , como*

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) d\sigma^2 + \frac{2M}{r} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 \quad (85)$$

Demostración. Desarrollando el último término en la expresión (85)

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) d\sigma^2 + \frac{2M}{r} (dt^2 - 2a \sin^2 \theta dt d\phi + a^2 \sin^4 \theta d\phi^2) \quad (86)$$

y tomando hasta primer orden en a el término $a^2 \sin^4 \theta d\phi^2$ queda como un resto de segundo orden. Reagrupando términos se obtiene la expresión buscada. \square

Debido a la rotación, se espera que al igual que ocurre con los fluidos, la esfera se aplane por los polos dando lugar a un elipsoide. Por tanto, la elección de coordenadas más simple será usar elipsoides como sistema de coordenadas en la simetría axial. Tomemos la coordenada r como el semieje que se encuentra sobre el eje de simetría, de manera que r sea constante para un elipsoide dado. Ahora definamos $\phi \in [0, 2\pi]$ como el ángulo acimutal medido alrededor del eje de simetría, y $\theta \in [0, \pi]$ una tercera coordenada que representa el ángulo polar. Partiendo de una posible parametrización de un elipsoide

$$x = A \sin \theta \cos \phi \quad y = B \sin \theta \sin \phi \quad z = C \cos \theta \quad (87)$$

donde A, B, C son los semiejes a lo largo de los ejes x, y, z respectivamente. Como se ha definido r de manera que fuese el semieje a lo largo del eje de simetría, z , se tendrá que $C = r$. Además, teniendo en cuenta la simetría axial, sería de esperar que $A = B$, donde además las tomaremos como una función arbitraria que depende de la coordenada r , por tanto

$$x = f(r) \sin \theta \cos \phi, \quad y = f(r) \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (88)$$

De esta forma

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= (f_r^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) dr^2 + 2(f f_{,r} - r) \sin \theta \cos \theta dr d\theta \\ &\quad + (f^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) d\theta^2 + f^2 \cos^2 \theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (89)$$

Para que estas coordenadas sean ortogonales, necesariamente $2(f f_{,r} - r) = 0$, por tanto

$$f^2 - r^2 = cte \quad (90)$$

e imponiendo que el valor de esa constante sea a^2 finalmente se obtiene

$$f(r) = \sqrt{r^2 + a^2} \quad (91)$$

Con lo cual

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \quad (92)$$

Entonces para un espacio tiempo plano en las coordenadas elipsoidales definidas anteriormente se tiene

$$-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt^2 + \frac{\Sigma}{r^2 + a^2} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (93)$$

donde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$.

Proposición 4.2. *La métrica dada en la expresión (93) expresada en coordenadas elipsoidales se puede escribir como*

$$ds^2 = -\frac{r^2 + a^2}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\Sigma}{r^2 + a^2} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 \quad (94)$$

Demostración. Desarrollando únicamente los términos de (94) que no aparecen ya en la expresión (93) se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{r^2 + a^2}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 &= -\frac{r^2 + a^2}{\Sigma} (dt^2 - 2a \sin^2 \theta dt d\phi + a^2 \sin^4 \theta d\phi^2) \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [(r^2 + a^2)^2 d\phi^2 - 2a dt d\phi + a^2 dt^2] \end{aligned} \quad (95)$$

Agrupando los términos con dt^2

$$\frac{1}{\Sigma} (a^2 \sin^2 \theta - r^2 - a^2) dt^2 = -\frac{1}{\Sigma} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) dt^2 = -dt^2 \quad (96)$$

Por otra parte, los términos $dt d\phi$ claramente se anularán

$$2 \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} (a \sin^2 \theta - a \sin^2 \theta) dt d\phi = 0 \quad (97)$$

y por último, simplificando los términos multiplicados por $d\phi^2$

$$\begin{aligned} \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \sin^2 \theta (-a^2 \sin^2 \theta + r^2 + a^2) d\phi^2 &= \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \sin^2 \theta (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\phi^2 \\ &= (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (98)$$

se recupera la expresión buscada. \square

Aunque los términos $dt d\phi$ se anulen, esto aporta un buen punto de partida para encontrar una métrica de un cuerpo en rotación, en la cual ese término no se anula. Si comparamos la expresión dada en la proposición 4.2 con la métrica obtenida en la

proposición 4.1, se sugiere un cambio en el primer y segundo término. Propongamos el cambio dado por

$$\frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \rightarrow \frac{r^2 + a^2 - Z(r)}{\Sigma} \quad (99)$$

donde además en el segundo término de (93) tomaremos

$$r^2 + a^2 \rightarrow F(r) \quad (100)$$

Con estos cambios la expresión de la métrica dada en (94) quedará de la forma[¶]

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\Sigma}{F(r)} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{Z(r)}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta)^2 \quad (101)$$

Si ejecutamos el programa descrito en el anexo D, podemos obtener el tensor de Einstein, cuyas componentes son muy complicadas excepto el término G_{rr} , que deberá cumplir $G_{rr} = 0$ ya que estamos en vacío. Para simplificar el cálculo hemos tomado el cambio $q = \cos^2 \theta$, con lo cual $d\theta^2 = dq^2/[4q(1-q)]$. El resultado que se obtiene será

$$G_{rr} = -\frac{a^2 q r^2 + r^4 - a^2 q Z}{F} + \frac{r(rZ + (r^2 + qa^2)(r - Z'))}{r^2 + a^2 - Z} \quad (102)$$

que podremos escribir como $G_{rr} = Aq + B$, con

$$\begin{aligned} A &= \frac{-a^2 [(r^2 - Z)(r^2 + a^2 - Z) + r(Z' - r)F]}{F(r^2 + a^2 - Z)} \\ B &= \frac{-r^2(r^2 + a^2 - Z) + F[Z + r(r - Z')]}{F(r^2 + a^2 - Z)} \end{aligned} \quad (103)$$

Por tanto, para que se cumpla $G_{rr} = 0$, necesariamente A y B se deben anular, con lo cual [11]

$$F = \frac{(r^2 - Z)(r^2 + a^2 - Z)}{r(r - Z')} \quad (104)$$

con lo que sustituyendo la expresión anterior en (103) e igualando ambos términos a cero se obtiene (obviando las soluciones triviales)

$$Z' = \frac{Z}{r} \Rightarrow Z = 2Mr \quad (105)$$

donde $2M$ se obtiene al comparar el límite de campo débil. Sustituyendo esta expresión en (104)

$$F = r^2 + a^2 - 2Mr \quad (106)$$

obteniendo así la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist.

[¶]Se asume que la constante a de la métrica de Lense-Thirring es la misma que el parámetro a de las coordenadas elipsoidales.

5. Métrica de Kerr como solución estacionaria axialmente simétrica

Definición 5.1. La métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist viene dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (107)$$

donde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ y $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, con la constante, a , el momento angular por unidad de masa.

Proposición 5.2. Si no hay rotación, entonces de la métrica de Kerr se recupera la métrica de Schwarzschild.

Demostración. La prueba es inmediata sustituyendo $a = 0$ en la expresión (107). \square

Una vez definida la métrica de Kerr, es necesario estudiar las singularidades que presenta, y distinguir entre cuáles de ellas son singularidades debidas a la elección del sistema de coordenadas, que podrán ser evitables pasando a otro sistema de coordenadas, y cuáles son singularidades de curvatura.

5.1. Singularidades de curvatura

Teorema 5.3. La métrica de Kerr es singular en $r = 0$ y $\theta = \pi/2$.

Demostración. Calculando el escalar de Kretschmann

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48M^2 (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \left[(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta \right]}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6} \quad (108)$$

claramente se obtiene que este invariante es singular para los valores $r = 0$, $\theta = \pi/2$. \square

Corolario 5.4. La singularidad en la métrica de Kerr tiene forma de anillo.

Demostración. Tomando la definición de las coordenadas elipsoidales dadas para $r = 0$, $\theta = \pi/2$ se tiene que

$$x = a \sin \phi, \quad y = a \cos \phi, \quad z = 0 \quad (109)$$

con $\phi \in [0, 2\pi]$. \square

5.2. Singularidades coordenadas

Proposición 5.5. *En la 2-esfera unidad sin los polos $(0,0,\pm 1)$*

$$\Sigma d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 = \Sigma d\sigma^2 + (1 + 2Mr\Sigma^{-1}) a^2 \sin^4 \theta d\phi^2 \quad (110)$$

Demostración. Sustituyendo $g_{\phi\phi}$ en (110) se tiene

$$\Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (111)$$

y desarrollando el producto

$$\Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2Ma^2r}{\Sigma} \sin^4 \theta d\phi^2 \quad (112)$$

Utilizando la identidad $r^2 + a^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta = \Sigma + a^2 \sin^2 \theta$ y agrupando

$$\Sigma (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + a^2 \sin^4 \theta (1 + 2Mr\Sigma^{-1}) d\phi^2 \quad (113)$$

donde $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ es el elemento de línea $d\sigma^2$ de una 2-esfera unidad. \square

Proposición 5.6. *El elemento de línea en la métrica de Kerr se puede escribir como*

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\sigma^2 + a^2 \sin^4 \theta d\phi^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 \quad (114)$$

Demostración. Partiendo de la expresión de la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist

$$\begin{aligned} g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{rr} dr^2 \\ + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 &= (g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2) \\ &\quad + (g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{rr} dr^2) \end{aligned} \quad (115)$$

La proposición 5.5 muestra que el primer sumando se puede escribir como

$$\Sigma d\sigma^2 + (1 + 2Mr\Sigma^{-1}) a^2 \sin^4 \theta d\phi^2 \quad (116)$$

donde el segundo sumando es

$$\begin{aligned} \left(-1 + \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 \\ - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi &= -dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 \\ &\quad + \frac{2Mr}{\Sigma} \left(dt - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi \right) d\phi \end{aligned} \quad (117)$$

y combinando ambas se obtiene la expresión buscada. \square

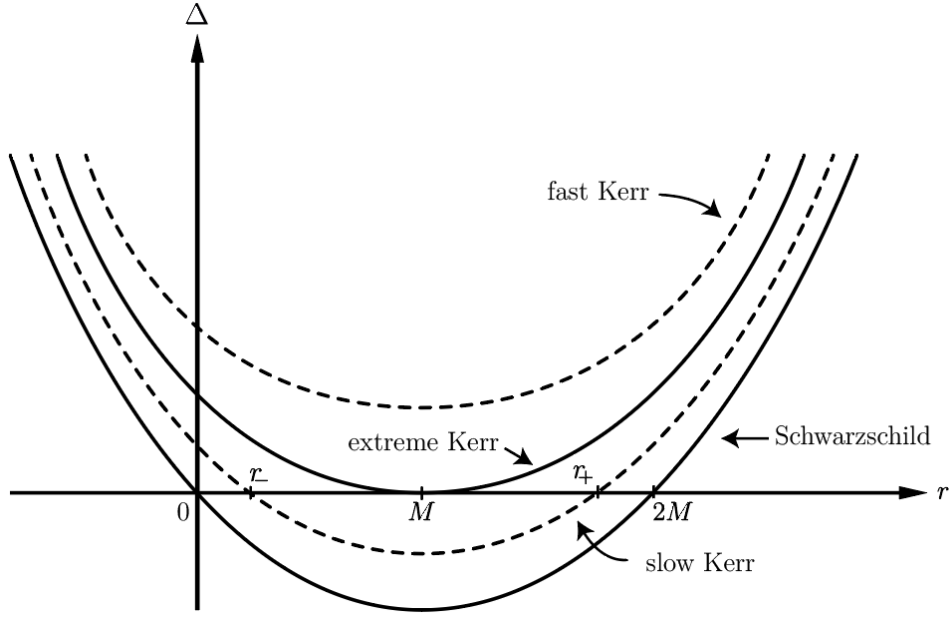


Figura 3: Horizontes de un agujero negro en función del momento angular por unidad de masa.

Teorema 5.7. *La métrica expresada de la forma (114) no es degenerada en los polos.*

Demostración. Tomando $\theta = \{0, \pi\}$ se tiene

$$ds^2 = (r^2 + a^2)^{-1} \Delta dt^2 + (r^2 + a^2) \Delta^{-1} dr^2 + (r^2 + a^2) d\sigma^2 \quad (118)$$

que es no degenerada, salvo si $\Delta = 0$. □

Corolario 5.8. *Las singularidades de la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist en $\theta = \{0, \pi\}$ son singularidades producidas por la elección del sistema de coordenadas.*

Proposición 5.9. *La métrica de Kerr tiene una singularidad coordenada en $\Delta = 0$.*

Demostración. La prueba es inmediata analizando la expresión (107). □

5.3. Tipos de espacio-tiempo de Kerr

Definición 5.10. *Las regiones determinadas por $\Delta = 0$ se conocen como los horizontes del agujero negro, que vienen dados por*

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (119)$$

Definición 5.11. En función del valor momento angular por unidad de masa podemos distinguir cuatro espacio-tiempos diferentes^{||}, ver figura 3.

- $a^2 > M^2$, que se conoce como **espacio-tiempo de Kerr rápido**. En este caso, como Δ no tiene raíces reales, no tendremos horizonte de eventos (r_+), dando lugar a lo que se conoce como una singularidad desnuda.
- $a^2 = M^2$, recibe el nombre de **espacio-tiempo de Kerr extremo**. Δ tiene una única raíz doble, con lo cual solo tendremos un horizonte dado por $r_+ = r_- = M$.
- $a^2 < M^2$, este espacio se denomina **espacio-tiempo de Kerr lento**. A diferencia de los casos anteriores, ahora si encontramos dos raíces reales de Δ tal que $0 < r_- < r_+ < 2M$, y por tanto tendremos un horizonte de eventos que llamaremos horizonte de eventos **exterior** (r_+) y un horizonte de eventos **interior** (r_-).
- $a^2 = 0$, en este último caso de forma similar a como se mostró en la proposición 5.2, si no existe momento angular se recupera el espacio-tiempo de **Schwarzschild**.

5.4. Bloques de Boyer-Lindquist

Observación 5.12. Como la métrica de Kerr no es singular en $r = 0$, entonces podemos tomar la coordenada r recorriendo toda la recta real.

Observación 5.13. Como tras la observación 5.12 ahora las coordenadas r y t son coordenadas del plano \mathbb{R}^2 y las coordenadas θ, ϕ de la 2-esfera S^2 , podemos tomar el espacio-tiempo de Kerr como la variedad producto $\mathbb{R}^2 \times S^2$.

Definición 5.14. Se definen los bloques de Boyer-Lindquist como abiertos de $\mathbb{R}^2 \times S^2$:

$$\begin{aligned} \text{I} & : r > r_+ \\ \text{II} & : r_- < r < r_+ \\ \text{III} & : r < r_- \end{aligned} \tag{120}$$

Corolario 5.15. De la definición de $g_{\alpha\alpha} = \langle \partial_\alpha, \partial_\alpha \rangle$ se obtiene** que

1. ∂_θ siempre es un vector espacial.
2. ∂_r es espacial en $\text{I} \cup \text{III}$ y temporal en II .

^{||}A partir de esta definición, solo se estudiará el espacio-tiempo lento de Kerr.

^{**}Tanto la causalidad de ∂_ϕ en el bloque III como la de ∂_t en $\text{I} \cup \text{III}$ se estudiarán más adelante.

3. ∂_ϕ es espacial en $I \cup II$.

4. ∂_t es espacial en II debido a que es perpendicular a ∂_r .

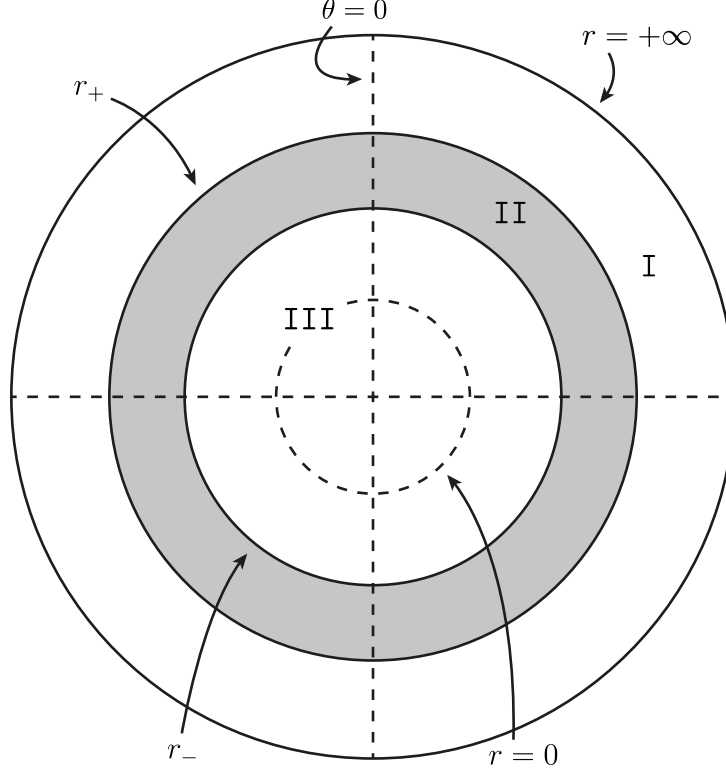


Figura 4: Sección para t y ϕ constantes donde se muestran los bloques de Boyer-Lindquist. El radio está representado como e^r .

5.5. Ergosfera

Siguiendo el resultado obtenido en la sección 2, conviene estudiar si existen regiones donde no sea posible que un objeto sea estacionario para un observador en el infinito. A lo largo de esta sección estudiaremos la existencia de dicha región, así como los efectos que se producen en ella.

Definición 5.16. Se define el límite estacionario $L = \{g_{tt} = 0\}$ como la hipersuperficie en $I \cup III$ que separa la región estacionaria (∂_t temporal) de la región $\mathcal{D} = \{g_{tt} > 0\}$, donde ∂_t es un vector espacial.

Proposición 5.17. En el espacio-tiempo de Kerr de rotación lenta, el **límite estacionario** L viene determinado por

$$r_{E+} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

$$r_{E-} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (121)$$

Demostración. Partiendo de la expresión de la métrica de Kerr dada en (107) se tiene que

$$g_{tt} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} = 0 \quad (122)$$

recuperando la expresión $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ se obtiene

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (123)$$

cuyas soluciones vienen dadas en (121), y al estar en un espacio-tiempo lento de Kerr podemos asegurar la existencia de estas soluciones con la definición 5.11. \square

Definición 5.18. La región \mathcal{E} del bloque I y la región \mathcal{E}' del bloque III donde ∂_t es espacial se conoce como *ergosfera*.

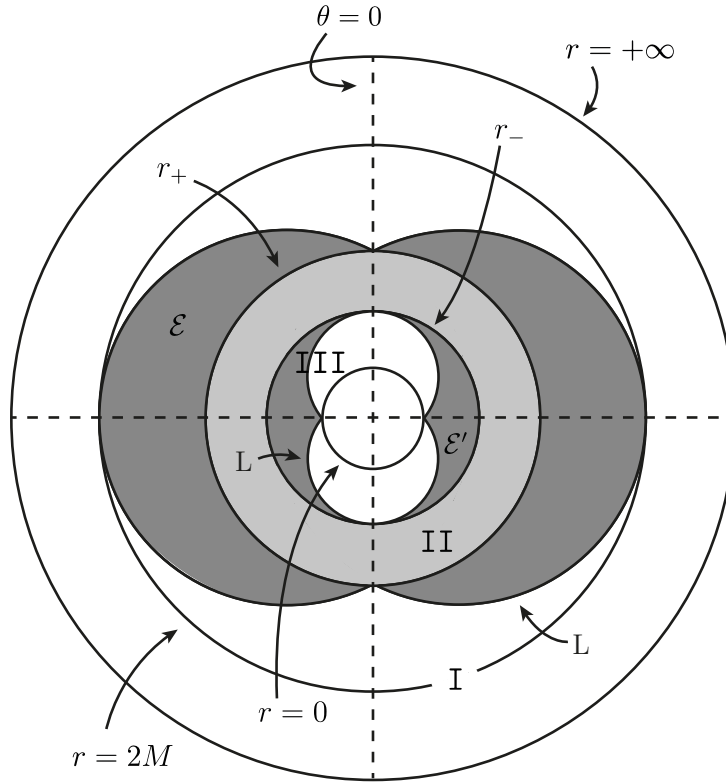


Figura 5: Sección para t y ϕ constantes donde se muestra la región \mathcal{D} en dos tonos de gris conteniendo el bloque II y las ergosferas \mathcal{E} y \mathcal{E}' (en gris oscuro) y los bloques de Boyer-Lindquist. Igual que en la figura 4, el radio r se representa como e^r .

Definición 5.19. Una curva se dice que es no-espacial si su vector tangente es nulo o temporal.

Proposición 5.20. *En cualquier curva temporal α contenida en $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$, la coordenada ϕ es estrictamente monótona.*

Demostración. Cada hipersuperficie $N : \phi = \phi_0$ se puede expresar como función de las coordenadas t, r, θ . Con lo cual, los vectores coordenados ortogonales $\partial_t, \partial_r, \partial_\theta$ generan el espacio $T_p(N)$, ya que forman una base de este. Mediante el corolario 5.15 y la definición 5.18 se tiene que los tres vectores son espaciales en $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$, por tanto $T_p(N)$ es espacial y, en consecuencia, también lo es N . Como tenemos que α es una curva temporal, entonces α no puede ser tangente a N . Por tanto, $\frac{d(\phi \circ \alpha)}{ds} = \alpha'[\phi]$ nunca es cero, con lo cual ϕ es estrictamente monótona. \square

Proposición 5.21. *Con una orientación temporal natural en \mathcal{E} , si α apunta hacia el futuro, entonces ϕ es necesariamente creciente.*

Demostración. Sea v un vector no-espacial en $p \in \mathcal{E}$, escribiendo $v = v^i \partial_i$ con $i = t, r, \theta, \phi$ se tiene

$$\langle v, v \rangle = g_{ii} (v^i)^2 + g_{\phi t} v^\phi v^t \leq 0 \quad (124)$$

Del corolario 5.15 se tiene que $g_{tt}, g_{rr}, g_{\theta\theta}$ son positivos en \mathcal{I} , además como $g_{\phi\phi} \geq 0$, entonces necesariamente $g_{\phi t} < 0$. Partiendo de que $g_{\phi t} \neq 0$ ya que $\theta \neq 0 \forall p \in \mathcal{E}$ y de su expresión

$$g_{\phi t} = -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} < 0 \forall p \in \mathcal{E} \quad (125)$$

necesariamente $v^\phi v^t > 0$. Si v apunta hacia el futuro entonces $v^t > 0$ y por tanto $v^\phi > 0$. Tomando $v = \alpha'(s)$ entonces $\frac{d(\phi \circ \alpha)}{d\tau} = v^\phi > 0$. \square

5.6. Máquina del tiempo de Carter

Definición 5.22. *Un espacio-tiempo (M, g) es **causal** si no existen curvas no-espaciales cerradas en M .*

Definición 5.23. *Se define la **máquina del tiempo de Carter** como la región determinada por $\mathfrak{T} = \{g_{\phi\phi} < 0\}$.*

Proposición 5.24. *Para $\theta = \pi/2$, entonces $\exists q = (t, r^*, \pi/2, \phi) \in \mathfrak{T}$ con $r^* < 0$.*

Demostración. Como $\theta = \pi/2$ se tendrá que $g_{\phi\phi} = r^2 + a^2 + 2Ma^2r^{-1}$, que es menor que cero para un r^* negativo suficientemente pequeño. \square

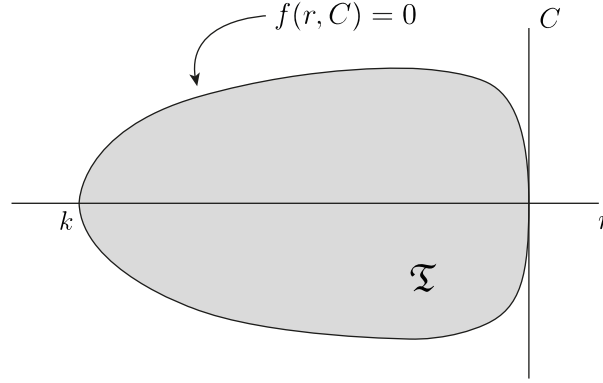


Figura 6: Región delimitada por la curva $f(r, C) = 0$, cuyo es la máquina del tiempo de Carter \mathfrak{T} . Además, se aprecia el resultado $g_{\phi\phi} > 0$ si $r < -\max\{M, a\}$.

Lema 5.25. La región \mathfrak{T} se encuentra en $-\max\{M, a\} < r < 0$. Además, fijando t se obtiene un toro cuyo ecuador exterior es la singularidad.

Demostración. El carácter causal de ∂_ϕ viene dado por

$$g_{\phi\phi} = \left[r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta \quad (126)$$

y como $\Sigma > 0 \forall r \in \mathbb{R} \wedge \forall \theta \in [0, \pi]$, de forma equivalente se podrá determinar el carácter causal de ∂_ϕ mediante

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= \Sigma (r^2 + a^2) + 2Mra^2 \sin^2 \theta \\ &= r^4 + a^2 (1 + \cos^2 \theta) r^2 + 2Ma^2 \sin^2 \theta r + a^4 \cos^4 \theta \end{aligned} \quad (127)$$

Si denotamos $C \equiv \cos \theta$ entonces se puede describir $f(r, \theta)$ como

$$f(r, C) = r^4 + a^4 (1 + C^2) r^2 + 2Ma^2 r - 2Ma^2 C^2 r + a^4 C^4 \quad (128)$$

donde claramente para $r \geq 0$ se tiene $f(r, C) > 0$. Si se grafica la curva para la cual $f(r, C) = 0$ se obtiene la figura 6.

Se trata entonces de una región ovalada simétrica a lo largo del eje r . En el ecuador se tiene que $f(r, 0) = r(r^3 + a^2 r + 2Ma^2)$, la cual será negativa para $k < r < 0$, donde $k = a^2/c_0^{1/3} - c_0^{1/3}/3$ y

$$c_0 = 27Ma^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2916M^2a^4 + 108a^6} \quad (129)$$

siendo k la única raíz negativa del polinomio de tercer grado en $f(r, 0)$. Comprobemos ahora si es posible acotar esta región, si $a > M$ se tiene que

$$c_0 < \left(27 + 6\sqrt{21}\right) a^3 \Rightarrow c_0^{1/3} < a \left(27 + 6\sqrt{21}\right)^{1/3} \quad (130)$$

entonces

$$\frac{a^2}{c_0^{1/3}} > \frac{a}{(27 + 6\sqrt{21})^{1/3}} \quad (131)$$

y

$$\frac{c_0^{1/3}}{3} < \frac{a(27 + 6\sqrt{21})^{1/3}}{3} \Rightarrow -\frac{c_0^{1/3}}{3} > -\frac{a(27 + 6\sqrt{21})^{1/3}}{3} \quad (132)$$

con lo cual, sumando ambos términos

$$k = \frac{a^2}{c_0^{1/3}} - \frac{c_0^{1/3}}{3} > \left(\frac{1}{(27 + 6\sqrt{21})^{1/3}} - \frac{(27 + 6\sqrt{21})^{1/3}}{3} \right) a = -a \quad (133)$$

por tanto $k > -a$. Si por el contrario $a < M$, siguiendo el mismo desarrollo se obtiene $k > -M$. Y si por último $a = M$, entonces se llega a que $k = -a$. Por tanto, se puede afirmar que $f(r, C) > 0$ si $r < -\max\{M, a\}$. Además, cabe remarcar que el punto $r = 0$, $C = 0$ no está en la región debido a que se trata de la singularidad. \square

Proposición 5.26. *Dado un evento $p = (t_0, r_0, \theta_0, \phi_0) \in \mathfrak{T}$, entonces cualquier otro evento $q = (t, r_0, \theta_0, \phi) \in \mathfrak{T} \forall t \in \mathbb{R} \wedge \forall \phi \in [0, 2\pi]$.*

Demostración. Si $p \in \mathfrak{T}$, por la definición se tiene que $g_{\phi\phi} < 0$, y como la métrica es independiente de las coordenadas t y ϕ , el signo se mantiene para cualesquiera t, ϕ , con lo que $q \in \mathfrak{T}$. \square

Lema 5.27. *Dado un $p \in \text{III}$, $\exists c > 0 : \forall \Delta t \geq c \wedge \forall \phi \in [0, 2\pi]$ se puede encontrar*

(i) *Una curva temporal α orientada hacia el futuro que conecta p y $(t + \Delta t, r^*, \pi/2, \phi)$.*

(ii) *Una curva temporal α orientada hacia el pasado que conecta p y $(t - \Delta t, r^*, \pi/2, \phi)$.*

Demostración. Sea $\alpha_1(s) = (t_0, r(s), \theta(s), \phi_0) \in \text{III}$ una curva que une p con $(t_0, r^*, \pi/2, \phi)$ y sea $A > 0$, podemos definir

$$\alpha(s) = (t_0 + At(s), r(s), \theta(s), \phi + Aas) \quad (134)$$

donde se satisface $dt/ds = r^2 + a^2$. Por tanto

$$\alpha(s) = \alpha_1(s) + (At(s), 0, 0, Aas) \quad (135)$$

con lo cual derivando la expresión anterior se obtiene

$$\alpha'(s) = \alpha'_1(s) + \underbrace{A(r^2 + a^2, 0, 0, a)}_V = \alpha'_1 + AV \quad (136)$$

donde

$$\alpha'_1(s) = \left(0, \frac{dr}{ds}, \frac{d\theta}{ds}, 0\right) \quad (137)$$

De las expresiones anteriores se deriva que $V \perp \alpha'_1$. Con esto

$$\langle \alpha', \alpha \rangle = \langle \alpha_1, \alpha'_1 \rangle + A^2 \langle V, V \rangle = \langle \alpha'_1, \alpha'_1 \rangle - A^2 \Delta \Sigma \quad (138)$$

Las curvas están definidas en un intervalo cerrado, por tanto $\langle \alpha'_1, \alpha'_1 \rangle$ está acotado superiormente, además, a lo largo de α las funciones Δ y Σ son mayores que cero. Por tanto, para un valor de A suficientemente grande se tendrá α temporal. Además, α apunta hacia el futuro debido a que V lo hace en III y $\langle \alpha', V \rangle = A \langle V, V \rangle < 0$.

Extendiendo α por una curva integral del campo vectorial V or $-\partial_\phi$ (vectores temporales orientados hacia el futuro) podemos incrementar libremente el valor final de la coordenada t y ajustar ϕ a cualquier valor. Por tanto, necesariamente c existe. \square

Proposición 5.28. *El bloque III es vicioso^{††}, es decir, para cualesquiera eventos $p, q \in$ III existe una curva temporal que apunta hacia el futuro en III que une p con q .*

Demostración. Para construir dicha curva tomaremos la unión de tres curvas diferentes, en primer lugar tomaremos la curva α dada en el lema 5.27 que une un punto p cualquiera en III con $p^* = (t_0 + \Delta t, r^*, \pi/2, \phi) \in \mathfrak{T}$. Para un $B > 0$ dado, construimos la segunda curva como

$$\lambda(s) = (t_0 + \Delta t - s, r^*, \pi/2, \phi - Bs) \quad \text{para } s \geq 0 \quad (139)$$

Claramente para $s = 0$ se tiene que $\lambda(0) = p^* \in \mathfrak{T}$, y además, por la proposición 5.26, como sólo varían ϕ y t , entonces $\lambda(s) \in \mathfrak{T} \forall s \geq 0$. El vector tangente a λ será $\lambda' = -\partial_t - B\partial_\phi$, con lo que

$$\langle \lambda', \lambda' \rangle = g_{tt} - 2Bg_{t\phi} + B^2g_{\phi\phi} \quad (140)$$

Como la métrica es independiente de t y ϕ , entonces $\langle \lambda', \lambda' \rangle$ es constante a lo largo de λ ya que r^* y θ son fijos en λ . Como $g_{\phi\phi} < 0$, entonces $\exists B > 0 : \langle \lambda', \lambda' \rangle < 0$. Fijando ese valor de B , λ es temporal. Además, λ está orientada hacia el futuro debido a que $\langle \lambda', V \rangle = \Delta(1 - aB) < 0$ para $B > 1/a$ ya que $\Delta > 0 \in$ III.

Como la componente de la coordenada t en λ' es $\lambda'(s)[t] = -1$, entonces, a pesar de que λ sea una curva temporal orientada hacia el futuro, la coordenada de Boyer-Lindquist t decrece. Tomando $q^* = (t_y, r^*, \pi/2, \phi_y)$ como el final de la curva λ , debido al lema 5.27, este evento puede ser alcanzado desde un evento q por una curva temporal orientada hacia el pasado β . Por tanto invirtiendo la parametrización de β para que una q^* con q , si se toma la unión $\alpha \cup \lambda \cup (-\beta)$ se obtiene la curva buscada. \square

^{††}Se ha tomado la traducción literal de *vicious* [38].

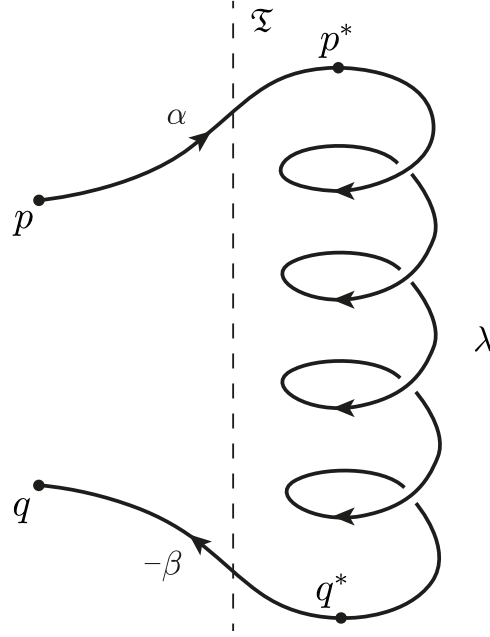


Figura 7: Esquema de la curva $\alpha \cup \lambda \cup (-\beta)$. A través de α , un habitante del bloque III puede entrar a la región \mathfrak{T} , viajar al pasado siguiendo la curva λ , y finalmente salir de \mathfrak{T} hasta un evento q a través de la curva $-\beta$.

Una vez que hemos estudiado ciertos aspectos geométricos del espacio-tiempo de Kerr, a continuación estudiaremos un proceso físico importante que se puede dar en este tipo de agujeros negros, conocido como proceso de Penrose.

5.7. Proceso de Penrose

Proposición 5.29. Sea p^α el 4-momento de una partícula libre, entonces

$$p^\beta p_{\alpha;\beta} = 0 \quad (141)$$

Demostración. La demostración es inmediata desarrollando la derivada covariante. \square

Lema 5.30. Dado un vector de Killing ξ^α y el 4-momento de una partícula p^α , entonces $\xi^\alpha p_\alpha$ es una magnitud conservada a lo largo de cualquier geodésica.

Demostración. Definiendo $f \equiv p^\beta \xi_\beta$ dependiente del parámetro afín s , se tendrá que

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= u^\alpha f_{,\alpha} = u^\alpha (p^\beta \xi_\beta)_{,\alpha} = u^\alpha (p^\beta_{,\alpha} \xi_\beta + p^\beta \xi_{\beta,\alpha}) \\ &= u^\alpha (p^\beta_{,\alpha} \xi_\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} p^\gamma \xi_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} p^\beta \xi_\gamma + p^\beta \xi_{\beta,\alpha}) \end{aligned} \quad (142)$$

multiplicando por la masa de la partícula se tendrá

$$m \frac{df}{ds} = p^\alpha p_{;\alpha}^\beta \xi_\beta + \xi_{\beta;\alpha} p^\alpha p^\beta \quad (143)$$

y utilizando el resultado dado en la proposición 5.29 entonces

$$m \frac{df}{ds} = \xi_{\beta;\alpha} p^\alpha p^\beta \quad (144)$$

Como $\xi_{\beta;\alpha}$ es un tensor antisimétrico y $p^\alpha p^\beta$ un tensor simétrico, se tiene que $\xi_{\beta;\alpha} p^\alpha p^\beta = 0$, por tanto $f \equiv p^\beta \xi_\beta$ es una magnitud conservada a lo largo de una geodésica^{‡‡}. \square

Corolario 5.31. *Del lema 5.30 se sigue que en la métrica de Kerr las cantidades definidas como $E = -p^t \partial_t$ y $L = p^\phi \partial_\phi$ son cantidades conservadas.*

Lema 5.32. *En el espacio-tiempo de Kerr, un observador situado en el infinito puede medir una partícula en la ergosfera con energía negativa.*

Demostración. Partiendo de las expresiones para las geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr [9]

$$\Sigma^2 \dot{\theta}^2 = \Theta \quad (145)$$

$$\Sigma^2 \dot{r}^2 = R^2 \quad (146)$$

$$\Sigma \dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} [2aMrE + (\Sigma - 2Mr) L_z \operatorname{cosec}^2 \theta] \quad (147)$$

$$\Sigma \dot{t} = \frac{1}{\Delta} (\chi^2 E - 2aMrL_z) \quad (148)$$

donde $\chi^2 = 2aMr/\omega$, con ω definido en la proposición 2.15, y además

$$R = E^2 r^4 + (a^2 E^2 - L_z^2 - \mathcal{C}) r^2 + 2Mr [\mathcal{C} + (L_z - aE)^2] - a^2 \mathcal{C} - \delta_1 r^2 \Delta \quad (149)$$

$$\Theta = \mathcal{C} + (a^2 E^2 - L_z^2 \operatorname{cosec}^2 \theta) \cos^2 \theta - \delta_1 a^2 \cos^2 \theta \quad (150)$$

para

$$\delta_1 = \begin{cases} 1, & \text{si es una geodésica temporal} \\ 0, & \text{si es una geodésica nula} \end{cases} \quad (151)$$

y la constante de movimiento de Carter

$$\mathcal{C} = \mathcal{K} - (L_z - aE)^2 = p_\theta^2 + \cos^2 \theta [a^2 (\mu^2 - E^2) + \sin^{-2} \theta L_z^2] \quad (152)$$

^{‡‡}El razonamiento es igualmente válido para geodésicas nulas.

donde se tiene que la masa en reposo de la partícula viene dada por

$$\mu = (-g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta)^{1/2} \quad (153)$$

De las expresiones (146) y (149) se tendrá que el límite de energía para una partícula en un lugar determinado del espacio, tomando $\dot{r} = 0$, vendrá determinado por la relación

$$E^2 r^4 + (a^2 E^2 - L_z^2 - \mathcal{C}) r^2 + 2Mr [\mathcal{C} + (L_z - aE)^2] - a^2 \mathcal{C} - \delta_1 r^2 \Delta = 0 \quad (154)$$

que reagrupando términos se puede escribir como

$$[r(r^2 + a^2) + 2a^2 M] E^2 - (4aML_z) E - (r - 2M) L_z^2 - (\delta_1 r + \mathcal{C}/r) \Delta = 0 \quad (155)$$

Despejando tanto $E(L_z)$ como $L_z(E)$ se obtienen las expresiones

$$E = \frac{1}{r(r^2 + a^2) + 2a^2 M} \left[2aML_z \pm \Delta^{1/2} \{r^2 L_z^2 + [r(r^2 + a^2) + 2a^2 M] (\delta_1 r + \mathcal{C}r^{-1})\}^{1/2} \right] \quad (156)$$

y

$$L_z = \frac{1}{r - 2M} \left\{ -2aME \pm \Delta^{1/2} [r^2 E^2 - (r - 2M) (\delta_1 r + \mathcal{C}r^{-1})]^{1/2} \right\} \quad (157)$$

Por convenio, se asignará a una partícula en reposo en el infinito con masa unidad la energía $E = 1$. Por tanto, en la expresión (156) debemos tomar el signo positivo. Con esto, se tendrá que necesariamente $L_z < 0$ para que se de $E < 0$, y además

$$4a^2 M^2 L_z^2 \geq \Delta \{r^2 L_z^2 + [r(r^2 + a^2) + 2a^2 M] (\delta_1 r + \mathcal{C}r^{-1})\} \quad (158)$$

donde la desigualdad anterior se puede escribir como

$$[r^2(r^2 + a^2) + 2a^2 Mr] \left\{ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) L_z^2 + \Delta \left(\delta_1 + \frac{\mathcal{C}}{r^2}\right) \right\} < 0 \quad (159)$$

Por tanto, se tiene que

$$E < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} L_z < 0 \\ (r - 2M) < -\frac{\Delta r}{L_z^2} \left(\delta_1 + \frac{\mathcal{C}}{r^2}\right) < 0 \end{cases} \quad (160)$$

De la segunda desigualdad en la expresión anterior se ve claramente que $r < 2M$, esto quiere decir, que para que la partícula tenga energía negativa debe estar en el interior de la ergosfera. \square

Corolario 5.33. *A partir del lema 5.32 es posible establecer un proceso, conocido como **proceso de Penrose**, mediante el cual se extraiga energía del agujero negro de Kerr.*

Demostración. Para definir este proceso, partimos de una partícula que cae libremente desde el infinito hasta el agujero negro, con lo que la energía medida por el observador en el infinito será

$$E_0 = -p_0^t \partial_t \quad (161)$$

Durante esta caída, la cantidad E_0 permanecerá constante. Supongamos que, una vez esta partícula entra en la ergosfera, se divide en dos. Debido a la conservación del momento angular

$$p_0^t = p_1^t + p_2^t \quad (162)$$

donde p_1^α y p_2^α representan los 4-momentos de las dos partículas producto de la división. Multiplicando la expresión anterior por ∂_t se tendrá

$$E_0 = E_1 + E_2 \quad (163)$$

Si la división es tal que la energía medida por el observador sobre la partícula 1 sea negativa. Entonces, necesariamente, $E_2 > E_0$. Supongamos también que la partícula 2 es capaz de salir del agujero negro y escapar al infinito, y la partícula 1 cae al interior del horizonte de eventos, siguiendo el esquema que se muestra a continuación.

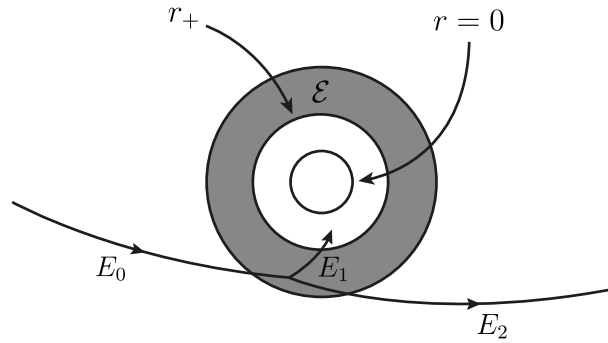


Figura 8: Esquema del proceso de Penrose. Se muestra el agujero negro de Kerr (con radio e^r) desde una perspectiva contenida en el eje de simetría.

Por tanto, el observador medirá $E_2 = E_0 + |E_1|$, y la masa del agujero negro será $M - |E_1|$. Por lo tanto, se ha reducido su masa en $|E_1|$. \square

Proposición 5.34. *Existe un límite a partir del cual no se puede extraer masa de un agujero negro de Kerr.*

Demostración. Tomemos una partícula que viene del infinito siguiendo una geodésica contenida en el plano ecuatorial hasta un punto tal que $r < 2M$, donde tiene un punto de retorno, y en consecuencia $\dot{r} = 0$. Por tanto, tomando $E_0 = 1$ y $\mathcal{C} = 0$ se tendrá que (157) viene dado por

$$L_z^{(0)} = \frac{1}{r - 2M} \left[-2aM + (2\Delta Mr)^{1/2} \right] = \alpha^{(0)} \quad (164)$$

Si esta partícula se divide entonces en dos fotones, de los cuales uno de ellos cae irremediamente al interior del horizonte de eventos y el otro escapa al infinito, de forma similar, y tomando ahora $\delta_1 = 0$ por ser fotones y $\mathcal{C} = 0$ tendremos que tomando ambos signos en la expresión (157) se obtiene

$$L_z^{(1)} = \frac{1}{r - 2M} (-2aM + r\Delta^{1/2}) E^{(1)} = \alpha^{(1)} E^{(1)} \quad (165)$$

$$L_z^{(2)} = \frac{1}{r - 2M} (-2aM - r\Delta^{1/2}) E^{(2)} = \alpha^{(2)} E^{(2)} \quad (166)$$

Por tanto, teniendo en cuenta la conservación de la energía

$$E^{(0)} = E^{(1)} + E^{(2)} = 1 \quad (167)$$

y la conservación del momento angular

$$L_z^{(0)} = L_z^{(1)} + L_z^{(2)} \Rightarrow \alpha^{(0)} = \alpha^{(1)} E^{(1)} + \alpha^{(2)} E^{(2)} \quad (168)$$

se obtiene que

$$E^{(1)} = \frac{\alpha^{(0)} - \alpha^{(2)}}{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}} \quad E^{(2)} = \frac{\alpha^{(1)} - \alpha^{(0)}}{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}} \quad (169)$$

Sustituyendo en (169) las respectivas expresiones entonces

$$E^{(1)} = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2M}{r}} - 1 \right) \quad E^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2M}{r}} - 1 \right) \quad (170)$$

Por tanto la diferencia de energía tras el proceso será exactamente

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2M}{r}} - 1 \right) = -E^{(1)} \quad (171)$$

Como r viene determinado por el punto de retorno de la partícula con energía $E^{(0)} = 1$, entonces el mayor valor de ΔE para una M determinada será $r = r_+$, es decir, el punto de retorno situado en la frontera del horizonte de eventos, por lo que

$$\Delta E \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2M}{r_+}} - 1 \right) \quad (172)$$

Definiendo entonces la masa irreducible^{ss} M_{irr} como

$$M_{irr} = \frac{1}{2} (r_+ + a)^2 = \left(\frac{1}{2} M r_+ \right)^2 \quad (173)$$

lo cual finalmente da lugar a la expresión

$$\Delta E \leq \frac{1}{2} \left(\frac{M}{M_{irr}} - 1 \right) \quad (174)$$

y con esto queda entonces probado el enunciado propuesto. \square

La existencia de una masa irreducible nos lleva a pensar directamente en la termodinámica, y si existen unas leyes similares para los agujeros negros. Estas leyes describen la mecánica de los agujeros negros y, al igual que ocurre con la termodinámica, se basan en cuatro leyes. A pesar de que en este trabajo no se ha podido abarcar este área de estudio, se mostrará de manera introductoria una comparación que muestra la clara relación entre ambas.

Ley	Termodinámica	Mecánica de agujeros negros
0	T es constante en equilibrio	κ es constante
1	$\delta E = T \delta S$	$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q$
2	$\delta S \geq 0$	$\delta A \geq 0$
3	$T \not\rightarrow 0$ en un número finito de pasos	$\kappa \not\rightarrow 0$ en un número finito de pasos

Tabla 2: Comparación entre las leyes de la termodinámica y las leyes de la mecánica de agujeros negros. Se tiene que $\kappa = \kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2r_{\pm}^2}$, $\Omega = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$ y $\Phi = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2}$, con A el área, J el momento angular y Q la carga.

Además, este resultado nos lleva a estudiar la existencia de cantidades conservadas, que analizaremos a lo largo de la siguiente sección centrándonos en el estudio de las integrales de Komar y su relación con la solución de Kerr.

^{ss}El concepto de masa irreducible adquirirá un significado geométrico en la expresión $S = 16\pi M_{irr}^2$, véase [26].

6. Integrales de Komar

Proposición 6.1. *Si un espacio-tiempo (M, g) es estacionario, entonces existe una corriente de energía-momento conservada $J_\alpha = T_{\alpha\beta}k^\beta$ tal que*

$$d \star J = 0 \quad (175)$$

con k^β el vector de Killing asociado a un espacio-tiempo estacionario.

Demostración. Dada la definición de $J = J_\alpha dx^\alpha$ calculemos $\star J$, que será una 3-forma tal que

$$\begin{aligned} \star J &= (\star J)_{txy} dt \wedge dx \wedge dy + (\star J)_{txz} dt \wedge dx \wedge dz \\ &\quad + (\star J)_{tyz} dt \wedge dy \wedge dz + (\star J)_{xyz} dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \quad (176)$$

y utilizando nuevamente la proposición A.10 obtenemos

$$\begin{aligned} \star J &= -J_z dt \wedge dx \wedge dy + J_y dt \wedge dx \wedge dz \\ &\quad - J_x dt \wedge dy \wedge dz - J_t dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \quad (177)$$

Si se calcula entonces su diferencial exterior se tendrá una 4-forma tal que

$$d \star J = \left(-\frac{\partial J_t}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \quad (178)$$

con lo que tenemos

$$\nabla^\mu J_\mu = \nabla^\mu (T_{\mu\nu} k^\nu) = \nabla^\mu (T_{\mu\nu} \delta_t^\nu) = \nabla^\mu T_{\mu t} = 0 \quad (179)$$

por conservación del tensor energía-impulso. \square

Definición 6.2. *Se define la energía de materia total en una hipersuperficie espacial Σ como*

$$E[\Sigma] = - \int_{\Sigma} \star J \quad (180)$$

Proposición 6.3. *Si Σ, Σ' acotan una región espacial R , entonces*

$$E[\Sigma'] - E[\Sigma] = 0 \quad (181)$$

Demostración. La prueba es inmediata recordando que $d \star J = 0$, con lo cual

$$E[\Sigma'] - E[\Sigma] = - \int_{\partial R} \star J = - \int_R d \star J = 0 \quad (182)$$

\square

Observación 6.4. Si, para alguna 2-forma X se tuviera $\star J = dX$, podríamos obtener $E[\Sigma]$ a una integral sobre $\partial\Sigma$, y se podría definir la energía total para un límite asintóticamente plano general. Esto no es posible.

Lema 6.5. Sea k^α un vector de Killing, se cumple que

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta k^\gamma = R^\gamma_{\beta\alpha\delta} k^\delta \quad (183)$$

Proposición 6.6. Las ecuaciones de Einstein se pueden reescribir tal que

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) \quad (184)$$

Demostración. La demostración es trivial multiplicando por el tensor métrico. \square

Corolario 6.7. Sea k^α un vector de Killing y J'_α la 1-forma

$$J'_\alpha = -2 \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) k^\beta \quad (185)$$

se tendrá

$$d \star dk = 8\pi \star J' \quad (186)$$

Demostración. Siguiendo el lema 6.5 tendremos que

$$(\star d \star dk)_\alpha = -\nabla^\beta (dk)_{\alpha\beta} = -\nabla^\beta \nabla_\alpha k_\beta + \nabla^\beta \nabla_\beta k_\alpha = 2\nabla^\beta \nabla_\beta k_\alpha = -2R_{\alpha\beta} k^\beta \quad (187)$$

y aplicando la proposición 6.6 se tendrá

$$-2R_{\alpha\beta} k^\beta = -16\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) k^\beta \quad (188)$$

y definiendo

$$J'_\alpha = -2 \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) k^\beta \quad (189)$$

se obtiene la igualdad $d \star dk = 8\pi \star J'$, con lo cual $\star J'$ es exacta y queda probado el enunciado. \square

Del corolario anterior se sigue que

$$-\int_\Sigma \star J' = -\frac{1}{8\pi} \int_\Sigma d \star dk = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Sigma} \star dk \quad (190)$$

con Σ la región definida en la definición 6.2.

Definición 6.8. Un conjunto inicial $(\Sigma, h_{\alpha\beta}, K_{ab})$ es un límite asintóticamente plano si:

- (i) Σ es difeomorfo a $\mathbb{R}^3 \setminus B$, donde B es la bola cerrada centrada en el origen en \mathbb{R}^3 .
- (ii) Si definimos unas coordenadas x^i en Σ entonces $h_{ij} = \delta_{ij} + O(1/r)$ y $K_{ij} = O(1/r^2)$ cuando $r \rightarrow \infty$, con K_{ij} el tensor de curvatura extrínseca y $r = \sqrt{x^i x^i}$.
- (iii) Las derivadas de las expresiones anteriores también lo cumplen, como por ejemplo $h_{ij,k} = O(1/r^2)$, etc.

Definición 6.9. Sea $(\Sigma, h_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$ un límite asintóticamente plano es un espacio-tiempo estacionario. La masa de Komar se define como

$$M_{Komar} = -\frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} \star d\xi \quad (191)$$

con S_r^2 una esfera de radio $= x^i x^i$, donde x^i son las coordenadas utilizadas en la definición del límite asintóticamente plano.

Definición 6.10. Sea $(\Sigma, h_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$ un límite asintóticamente plano es un espacio-tiempo axialmente simétrico. El momento angular de Komar se define como

$$J_{Komar} = -\frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} \star d\psi \quad (192)$$

con ψ el vector de Killing asociado a la simetría axial.

Lema 6.11. Para la solución de Kerr se tiene que $M_{Komar} = M$ y $J_{Komar} = J$.

Demostración. Partiendo de la métrica de Kerr expresada de la forma

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta\Sigma}{A}\right) dt^2 + \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) (d\phi + \Omega dt)^2 + \left(\frac{\Sigma}{\Delta}\right) dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (193)$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{2Mra}{A} \equiv \frac{a}{A} \beta \\ A &= (r^2 + a^2) \Sigma + 2a^2 Mr \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (194)$$

y manteniendo las expresiones de Σ y Δ dadas en la expresión (107). Introduzcamos el marco ortonormal de 1-formas

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_0 &= -\left(\frac{\Delta\Sigma}{A}\right)^{1/2} dt \\ \tilde{\theta}_1 &= \left(\frac{\Sigma}{\Delta}\right)^{1/2} dr \\ \tilde{\theta}_2 &= \Sigma^{1/2} d\theta \\ \tilde{\theta}_3 &= \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma}\right)^{1/2} (d\phi + \Omega dt) \end{aligned} \quad (195)$$

En esta base la 1-forma de Killing temporal $\xi = g_{t\alpha}dx^\alpha$ es tal que

$$\xi = \left(\frac{\Delta\Sigma}{A}\right)^{1/2} \tilde{\theta}_0 + \frac{-2aMr \sin \theta}{(\Sigma A)^{1/2}} \tilde{\theta}_3 \quad (196)$$

donde tomando la diferencial exterior se obtiene

$$d\xi = \tilde{f}\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_0 + \tilde{g}\tilde{\theta}_2 \wedge \tilde{\theta}_0 + \tilde{h}\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_3 + \tilde{k}\tilde{\theta}_2 \wedge \tilde{\theta}_3 \quad (197)$$

con $\tilde{g}, \tilde{f}, \tilde{h}, \tilde{k}$ definidas como

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= -\left(\frac{2A^{1/2}}{\Sigma^3}\right) (M\Sigma + \beta r) (1 + a\Omega \sin^2 \theta) \\ \tilde{g} &= a\Omega \left(\frac{A^3}{\Sigma^6 \Delta}\right)^{1/2} \sin 2\theta \left[1 + \left(\frac{r^2 + a^2}{a}\right) \Omega\right] \\ \tilde{h} &= -\frac{2a}{\Sigma^2} \left(\frac{\Delta}{A}\right)^{1/2} (M\Sigma + \beta r) \sin \theta \\ \tilde{k} &= \frac{2A^{1/2}\Omega \cos \theta}{\sigma^2} (r^2 + a^2) \end{aligned} \quad (198)$$

Tomando entonces el dual de $d\xi$ se tendrá

$$\star d\xi = -\tilde{f}\tilde{\theta}_2 \wedge \tilde{\theta}_3 + \tilde{g}\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_3 + \tilde{h}\tilde{\theta}_2 \wedge \tilde{\theta}_0 - \tilde{k}\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_0 \quad (199)$$

con lo que

$$\begin{aligned} \star d\xi &= \left[-\tilde{f}A^{1/2}\Omega \sin \theta - \tilde{h}\Sigma \left(\frac{\Delta}{A}\right)^{1/2} \right] d\theta \wedge dt \\ &+ \left[\tilde{g} \left(\frac{A}{\Delta}\right)^{1/2} \Omega \sin \theta + \tilde{k}\Sigma \frac{1}{A^{1/2}} \right] dr \wedge dt \\ &- \tilde{f}A^{1/2} \sin \theta d\theta \wedge d\phi + \tilde{g} \left(\frac{A}{\Delta}\right)^{1/2} \sin \theta dr \wedge d\phi \end{aligned} \quad (200)$$

Para integrar sobre S_r^2 tomemos r constante tal que la coordenada temporal satisfaga $dt = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}d\phi$. En este sentido puntos infinitesimalmente cercanos son eventos simultáneos, esto no es cierto para puntos lejanos ya que si no la expresión anterior no es integrable [21], despues de una integración sobre ϕ terminamos en un evento diferente del que empezamos pero queremos integrar únicamente sobre eventos simultáneos, con lo que la integral queda tal que

$$M_{\text{Komar}} = -\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{f}A^{1/2} \sin \theta d\theta d\phi = M \quad (201)$$

Para el vector de Killing espacial asociado a la simetría axial tendremos $\psi = g_{\alpha\phi}dx^\alpha$, donde

$$\psi = g_{t\phi}dt + g_{\phi\phi}d\phi \quad (202)$$

Tomando la diferencial exterior tenemos

$$d\psi = g_{t\phi,r}dr \wedge dt + g_{t\phi,\theta}d\theta \wedge dt + g_{\phi\phi,r}dr \wedge d\phi + g_{\phi\phi,\theta}d\theta \wedge d\phi \quad (203)$$

que escribiéndolo en el marco de 1-formas descrito anteriormente queda

$$d\psi = \tilde{\lambda}\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_0 + \tilde{\kappa}\tilde{\theta}_2 \wedge \tilde{\theta}_0 + \tilde{\eta}\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_3 + \tilde{\omega}\tilde{\theta}_2 \wedge \tilde{\theta}_3 \quad (204)$$

donde definimos las funciones

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= -g_{t\phi,r} \frac{A^{1/2}}{\Sigma} - g_{\phi\phi,r} \Omega \frac{A^{1/2}}{\Sigma} \\ \tilde{\kappa} &= g_{t\phi,\theta} \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{A}{\Sigma} \right)^{1/2} - g_{\phi\phi,\theta} \frac{\Omega}{\Delta} \left(\frac{A}{\Delta} \right)^{1/2} \\ \tilde{\eta} &= g_{\phi\phi,r} \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\Delta}{A} \right)^{1/2} \\ \tilde{\omega} &= g_{\phi\phi,\theta} \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{A} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (205)$$

y cuyo dual será

$$\star d\psi = -\tilde{\lambda}\tilde{\theta}_2 \wedge \tilde{\theta}_3 + \tilde{\kappa}\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_3 + \tilde{\eta}\tilde{\theta}_2 \wedge \tilde{\theta}_0 + -\tilde{\omega}\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_0 \quad (206)$$

Usando la relación dada en (195)

$$\begin{aligned} \star d\psi &= \left[-\tilde{\kappa}\Omega \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\Delta} \right)^{1/2} + \tilde{\omega}\Sigma \left(\frac{1}{A} \right)^{1/2} \right] dr \wedge dt \\ &\quad - \left[\tilde{\eta}\Sigma \left(\frac{\Delta}{A} \right)^{1/2} - \tilde{\lambda}\Omega\sqrt{A} \sin \theta \right] d\theta \wedge dt \\ &\quad + \tilde{\kappa} \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\Delta} \right)^{1/2} dr \wedge d\phi \\ &\quad - \tilde{\lambda}\sqrt{A} \sin \theta d\theta \wedge d\phi \end{aligned} \quad (207)$$

Si elegimos una hipersuperficie espacial donde r sea constante, y además se tenga que $dt = -\frac{g_{t\phi}}{g_{tt}}d\phi$, entonces la expresión anterior se reduce a

$$\star d\psi = \frac{g_{t\phi}}{g_{tt}} \left[\tilde{\eta}\Sigma \left(\frac{\Delta}{A} \right)^{1/2} - \tilde{\lambda}\Omega\sqrt{A} \sin \theta \right] d\theta \wedge d\phi - \tilde{\lambda}\sqrt{A} \sin \theta d\theta \wedge d\phi \quad (208)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} J_{\text{Komar}} &= \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{g_{t\phi}}{g_{tt}} \left[\tilde{\eta}\Sigma \left(\frac{\Delta}{A} \right)^{1/2} - \tilde{\lambda}\Omega\sqrt{A} \sin \theta \right] d\theta d\phi \\ &\quad - \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\lambda}\sqrt{A} \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (209)$$

Al igual que en el caso anterior, como integramos únicamente sobre eventos simultáneos tendremos

$$J_{\text{Komar}} = -\frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \tilde{\lambda} \sqrt{A} \sin \theta d\theta \quad (210)$$

es decir,

$$J_{\text{Komar}} = \frac{1}{8} \int_0^\pi (g_{t\phi,r} + \Omega g_{\phi\phi,r}) \frac{A}{\Sigma} \sin \theta d\theta = aM \quad (211)$$

Tomando la definición de J quedará probado el enunciado. \square

7. Conclusiones

En este trabajo se ha obtenido una forma general para la métrica en espacio-tiempos estacionarios y axialmente simétricos, donde se ha introducido el formalismo de las tétradas para mostrar el arrastre del marco de inercia consecuencia de esta simetría axial. Además, se ha expuesto detalladamente la métrica de Lense-Thirring que estudia una aproximación con rotación lenta y de gravedad débil para posteriormente obtener, con una corrección a la métrica del espacio-tiempo plano en coordenadas elipsoidales, la métrica de Kerr.

Por otra parte, se han estudiado en profundidad algunas características geométricas que se dan en este tipo de espacio-tiempos, así como un proceso físico importante que se puede obtener en este tipo de soluciones.

Como continuación a este trabajo, un buen punto de partido puede comenzar por estudiar en detalle las leyes de la mecánica de los agujeros negros, como también profundizar en el cálculo de cantidades conservadas en otro tipo de soluciones, o introducir el formalismo de Newman-Penrose.

Agradecimientos

Agradecimientos al Doctor Pedro Bargueño por toda su ayuda con este trabajo, y por transmitirme esa ilusión por la investigación que creí que había perdido. A mis compañeros, por estos cuatro años que recordaré para siempre. Y, sobre todo, a mi familia y a Marta.

A. Cálculo exterior y Dual de Hodge

A.1. Preliminares

Definición A.1. Dado un espacio vectorial real V de dimensión n , se define $T^k(V^*)$ como el espacio de los tensores covariantes de rango k tal que

$$\hat{T} : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ copias}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (212)$$

Definición A.2. Dado un espacio vectorial real V de dimensión n , se dice que un tensor $\hat{T}^k(V^*)$ es antisimétrico si

$$\hat{T}_{(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k)} = -\hat{T}_{(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)} \quad (213)$$

con $1 \leq v_i < v_j \leq k$.

Definición A.3. Denotaremos por $\Lambda^k(V^*)$ al subespacio vectorial de $T^k(V^*)$ formado por los tensores covariantes antisimétricos de orden k . A los elementos de $\Lambda^k(V^*)$ los llamaremos k -formas.

Proposición A.4. Existe una proyección, llamada antisimetrización, del espacio $T^k(V^*)$ a $\Lambda^k(V^*)$. Sea $\hat{T} \in T^k(V^*)$

$$\begin{aligned} \text{Alt} : T^k(V^*) &\longrightarrow \Lambda^k(V^*) \\ \hat{T} &\longmapsto \text{Alt}(\hat{T}) \end{aligned} \quad (214)$$

con

$$\text{Alt}(\hat{T}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \sigma \hat{T} \quad (215)$$

donde S_k es el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \dots, k\}$ y

$$\sigma \hat{T}_{(v_1, \dots, v_k)} = \hat{T}_{(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})} \quad (216)$$

Además, la función $\text{sgn}(\sigma)$ vendrá determinada por

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & n^o \text{ par de permutaciones} \\ -1 & n^o \text{ impar de permutaciones} \end{cases} \quad (217)$$

A.2. Producto exterior

Definición A.5. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n , llamamos producto exterior a la aplicación

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^l(V^*) &\longrightarrow \Lambda^{k+l}(V^*) \\ (\hat{T}, \hat{G}) &\longmapsto \hat{T} \wedge \hat{G} \end{aligned} \quad (218)$$

con

$$\hat{T} \wedge \hat{G} = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\hat{T} \otimes \hat{G}) \quad (219)$$

Ejemplo A.6. Un ejemplo de interés que usaremos más adelante es el caso de las 1-formas. Dadas las 1-formas $\hat{a} = a_\alpha dx^\alpha$ y $\hat{b} = b_\beta dx^\beta$, entonces

$$\hat{T} = \hat{a} \wedge \hat{b} = a_\alpha b_\beta (dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha) = T_{|\alpha\beta|} dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad (220)$$

donde la notación $|\alpha\beta|$ indica $\alpha < \beta$.

Proposición A.7. $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\}$ forma una base de $\Lambda^k(V^*)$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq k$.

A.3. Producto interior

Definición A.8. Dado un espacio vectorial V de dimensión n , se define el producto interior en $\Lambda^k(V^*)$ como

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_k, w_1 \wedge \dots \wedge w_k \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle) \quad (221)$$

A.4. Dual de Hodge

Definición A.9. Sea V un espacio vectorial real, llamaremos dual de Hodge a la aplicación definida como

$$\star : \Lambda^k(V^*) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(V^*) \quad (222)$$

actuando sobre una base de V^* tal que

$$\star(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-k}} \quad (223)$$

Proposición A.10. Sean $\hat{a}, \hat{b} \in \Lambda^k(V^*)$, se tiene que

$$\hat{a} \wedge (\star \hat{b}) = \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle \omega \quad (224)$$

con $\omega = \sqrt{|g|} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$, donde g es el determinante de la métrica.

Lema A.11. La composición del dual de Hodge consigo mismo viene determinada por

$$\begin{aligned} \star\star : \Lambda^k(V^*) &\longrightarrow \Lambda^k(V^*) \\ \hat{T} &\longmapsto \star\star\hat{T} = (-1)^{k(n-k)}\hat{T} \end{aligned} \quad (225)$$

Demostración. Como la aplicación $\star\star$ es tal que $\Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$. Suponiendo

$$\star(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-k}} \quad (226)$$

entonces

$$\star \star (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \pm dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad (227)$$

dependiendo si es una base positiva o una base negativa. Por consiguiente

$$\begin{aligned} & dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-k}} \\ &= (-1)^{k(n-k)} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-k}} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \end{aligned} \quad (228)$$

con $(-1)^{k(n-k)}$ el determinante del cambio de base de $dx^{i_1}, \dots, dx^{j_{n-k}}$ a $dx^{j_1}, \dots, dx^{i_k}$. \square

A.5. Diferencial exterior

Definición A.12. Se define la diferencial exterior de una forma diferencial^{¶¶} de orden k como

$$\begin{aligned} d : \Lambda^k(T^*M) &\longrightarrow \Lambda^{k+1}(T^*M) \\ \hat{T} &\longmapsto d\hat{T} \end{aligned} \quad (229)$$

con

$$d\hat{T} = T_{|j_1, \dots, j_k|, i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \quad (230)$$

B. Ecuaciones de Maxwell

Proposición B.1. Las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como

$$d \star F = -4\pi j \quad dF = 0 \quad (231)$$

con F el tensor electromagnético y j la cuatricorrente.

Demostración. En primer lugar, dado que el tensor electromagnético F es un tensor covariante antisimétrico de orden 2, se tendrá que $F \in \Lambda^2(T^*M)$. Tomando la definición del tensor

$$F = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta \quad (232)$$

y desarrollando la expresión anterior para coordenadas cartesianas en el espacio de Minkowski

$$\begin{aligned} F = & F_{tx} dt \otimes dx + F_{ty} dt \otimes dy + F_{tz} dt \otimes dz + F_{xy} dx \otimes dy \\ & + F_{xz} dx \otimes dz + F_{yz} dy \otimes dz + F_{xt} dx \otimes dt + F_{yt} dy \otimes dt \\ & + F_{zt} dz \otimes dt + F_{yx} dy \otimes dx + F_{zx} dz \otimes dx + F_{zy} dz \otimes dy \end{aligned} \quad (233)$$

^{¶¶}Es necesario notar que aquí ya hemos pasado a hablar de formas diferenciales, así como de espacio tangente. En este trabajo solo hemos querido dar una introducción útil para su posterior aplicación, y por tanto no se ha profundizado en este aspecto.

Teniendo en cuenta la antisimetría del tensor electromagnético se podrá expresar la 2-forma en la base del producto exterior

$$\begin{aligned} F = & F_{tx}dt \wedge dx + F_{ty}dt \wedge dy + F_{tz}dt \wedge dz \\ & + F_{xy}dx \wedge dy + F_{xz}dx \wedge dz + F_{yz}dy \wedge dz \end{aligned} \quad (234)$$

Como $F \in \Lambda^2(T^*M)$ y estamos en un espacio de dimensión $n = 4$, se tendrá que $\star F \in \Lambda^2(T^*M)$, cuya expresión será $\star F = (\star F)_{|\alpha\beta|}dx^\alpha \wedge dx^\beta$. Por tanto

$$\begin{aligned} \star F = & A dt \wedge dx + B dt \wedge dy + C dt \wedge dz \\ & + D dx \wedge dy + E dx \wedge dz + F dy \wedge dz \end{aligned} \quad (235)$$

Utilizando la proposición A.10 y tomando el determinante de la métrica de Minkowski $|g| = 1$ se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \star F = & -F_{tx}dy \wedge dz + F_{ty}dx \wedge dz - F_{tz}dx \wedge dy \\ & + F_{xy}dt \wedge dz - F_{xz}dt \wedge dy + F_{yz}dt \wedge dx \end{aligned} \quad (236)$$

y desarrollando el producto exterior

$$\begin{aligned} \star F = & -F_{tx}(dy \otimes dz - dz \otimes dy) + F_{ty}(dx \otimes dz - dz \otimes dx) \\ & - F_{tz}(dx \otimes dy - dy \otimes dx) + F_{xy}(dt \otimes dz - dz \otimes dt) \\ & - F_{xz}(dt \otimes dy - dy \otimes dt) + F_{yz}(dt \otimes dx - dx \otimes dt) \\ = & -F_{tx}dy \otimes dz + F_{tx}dz \otimes dy + F_{ty}dx \otimes dz - F_{ty}dz \otimes dx \\ & - F_{tz}dx \otimes dy + F_{tz}dy \otimes dx + F_{xy}dt \otimes dz - F_{xy}dz \otimes dt \\ & - F_{xz}dt \otimes dy + F_{xz}dy \otimes dt + F_{yz}dt \otimes dx - F_{yz}dx \otimes dt \end{aligned} \quad (237)$$

Con lo cual, finalmente tomando la expresión del tensor electromagnético***

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (238)$$

se obtiene su dual de Hodge

$$(\star F)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (239)$$

***Se está trabajando, por simplicidad, en las unidades de Planck.

Obtengamos ahora la diferencial exterior del dual de Hodge del tensor electromagnético, que vendrá determinado por

$$d \star F = (\star F)_{|\alpha\beta|\gamma} dx^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad (240)$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} d \star F = & (\star F)_{tx,y} dy \wedge dt \wedge dx + (\star F)_{tx,z} dz \wedge dt \wedge dx \\ & + (\star F)_{ty,x} dx \wedge dt \wedge dy + (\star F)_{ty,z} dz \wedge dt \wedge dy \\ & + (\star F)_{tz,x} dx \wedge dt \wedge dz + (\star F)_{tz,y} dy \wedge dt \wedge dz \\ & + (\star F)_{xy,t} dt \wedge dx \wedge dy + (\star F)_{xy,z} dz \wedge dx \wedge dy \\ & + (\star F)_{xz,t} dt \wedge dx \wedge dz + (\star F)_{xz,y} dy \wedge dx \wedge dz \\ & + (\star F)_{yz,t} dt \wedge dy \wedge dz + (\star F)_{yz,x} dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \quad (241)$$

ordenando correctamente la base del producto exterior

$$\begin{aligned} d \star F = & (\star F)_{tx,y} dt \wedge dx \wedge dy + (\star F)_{tx,z} dt \wedge dx \wedge dz \\ & - (\star F)_{ty,x} dt \wedge dx \wedge dy + (\star F)_{ty,z} dt \wedge dx \wedge dz \\ & - (\star F)_{tz,x} dt \wedge dx \wedge dz - (\star F)_{tz,y} dt \wedge dy \wedge dz \\ & + (\star F)_{xy,t} dt \wedge dx \wedge dy + (\star F)_{xy,z} dx \wedge dy \wedge dz \\ & + (\star F)_{xz,t} dt \wedge dx \wedge dz - (\star F)_{xz,y} dx \wedge dy \wedge dz \\ & + (\star F)_{yz,t} dt \wedge dy \wedge dz + (\star F)_{yz,x} dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \quad (242)$$

y de nuevo, agrupando y sustituyendo los términos se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} d \star F = & \left(-\frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial t} \right) dt \wedge dx \wedge dy \\ & + \left(-\frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) dt \wedge dx \wedge dz \\ & + \left(-\frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) dt \wedge dy \wedge dz \\ & + \left(-\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \quad (243)$$

Se puede apreciar la similitud entre las ecuaciones de Maxwell y el resultado obtenido en la expresión anterior. Además, como tenemos una 3-forma podemos aplicar el dual de Hodge nuevamente a la expresión resultante quedando una 1-forma. Por tanto

$$\star(d \star F) = a_0 dt + a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz \quad (244)$$

y si se tiene en cuenta nuevamente la proposición A.10 finalmente se halla la expresión

$$\begin{aligned} \star(d \star F) = & \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dt \\ & - \left(-\frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) dx \\ & + \left(-\frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) dy \\ & - \left(-\frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial t} \right) dz \end{aligned} \quad (245)$$

De otro lado, tomando la definición de la cuatricorrente

$$j = j_t dt + j_x dx + j_y dy + j_z dz \quad (246)$$

con $j_t = -\rho$, y las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (247)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \times \vec{B} = -4\pi\vec{j} \quad (248)$$

El coeficiente que acompaña a dt vemos que es justamente

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho = -4\pi(-\rho) = -4\pi j_t \quad (249)$$

Por otra parte, para los demás coeficientes tenemos que se cumple justamente la expresión (248), por tanto

$$(\star d \star F)_x = -4\pi j_x \quad (250)$$

$$(\star d \star F)_y = -4\pi j_y \quad (251)$$

$$(\star d \star F)_z = -4\pi j_z \quad (252)$$

es decir, hemos probado que

$$\star(d \star F) = -4\pi j \quad (253)$$

Tomando ahora el lema A.11 y aplicando a ambos lados de la igualdad el dual de Hodge

$$\star \star (d \star F) = -4\pi \star j \quad (254)$$

y como $d \star F \in \Lambda^2(T^*M)$, con $n = 4$, entonces

$$\star \star = (-1)^{2 \cdot (4-2)} = 1 \quad (255)$$

obteniendo, por tanto, la primera ecuación buscada

$$d \star F = -4\pi \star j \quad (256)$$

Para demostrar la segunda expresión, bastará con calcular la diferencial exterior del tensor electromagnético, una vez calculado y sustituyendo por las componentes correspondientes queda la expresión

$$\begin{aligned} dF = & - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) dt \wedge dx \wedge dy \\ & - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial t} \right) dt \wedge dx \wedge dz \\ & - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) dt \wedge dy \wedge dz \\ & + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Las primeras tres componentes vemos que se corresponden a la ecuación de Maxwell dada por

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (257)$$

y la última, a la expresión

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (258)$$

por tanto, identificando términos tenemos que

$$dF = 0 \quad (259)$$

Esto quiere decir que F es cerrada, y por tanto se podrá escribir como $F = dA$, con A una 1-forma que recibe el nombre de cuádripotencial. Hemos encontrado así las ecuaciones de Maxwell en variedades pseudo-Riemannianas. Aunque se halla hecho el desarrollo en coordenadas cartesianas, al haber obtenido igualdades tensoriales estas expresiones serán válidas para cualquier sistema de coordenadas. \square

Definición B.2. *Se define la carga eléctrica total como*

$$Q = - \int_{\Sigma} \star j \quad (260)$$

donde Σ es una hipersuperficie espacial.

Proposición B.3. *La carga eléctrica total se puede determinar como*

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \star F \quad (261)$$

con $\partial\Sigma$ la frontera de la hipersuperficie espacial Σ .

Demostración. La prueba es inmediata utilizando la proposición B.1 y el teorema de Stokes. \square

C. Comparación entre las métricas de Kerr y Lense-Thirring

En esta sección compararemos la métrica de Kerr, (107), con la métrica de Lense-Thirring, (72), utilizando la expresión del escalar de Kretschmann. Para ello, mediante un programa en *Mathematica*, calcularemos el escalar de Kretschmann de la métrica de Lense-Thirring y posteriormente haremos su desarrollo en serie sobre α en cero hasta orden 2, tomando así el límite de rotación lenta. Además, será necesario hacer el límite de gravedad débil, por lo que haremos otro desarrollo en serie sobre r cuando $r \rightarrow +\infty$, obteniendo la expresión

$$K_{\text{LT}} = \frac{48M^2}{r^6} + \frac{480M^3}{r^7} + \frac{2940M^4 - 144M^2a^2(2 + \cos 2\theta)}{r^8} + \dots \quad (262)$$

Realizando el mismo desarrollo para el escalar de Kretschmann de la métrica de Kerr dado en (108) tenemos

$$K_{\text{Kerr}} = \frac{48M^2}{r^6} - \frac{1008M^2a^2 \cos^2 \theta}{r^8} + \dots \quad (263)$$

Como se puede ver, al tomar $a = 0$ en la métrica de Kerr recuperamos Schwarzschild. Sin embargo, en la métrica de Lense-Thirring nos quedan unos términos extra que no se anulan, con lo que se puede determinar que la métrica de Lense-Thirring se trata de una aproximación menos exacta.

D. Cálculo por ordenador de las ecuaciones de Einstein

Obtener las ecuaciones de Einstein para la métrica dada en (101) es una tarea realmente extensa, es por esto que se ha elaborado un programa en *Python* cuyo código se muestra a continuación.

Para el desarrollo de este programa, se ha requerido el uso de las librerías de *Sympy* y *Gravipy*. En primer lugar, será necesario definir, utilizando la librería *Sympy*, qué variables asignamos a las coordenadas, así como al resto de parámetros. Además, definiremos también las funciones $F(r)$ y $Z(r)$ que aparecen en la métrica.

Posteriormente será necesario definir la métrica del espacio-tiempo que deseemos estudiar, y realizar los cálculos de los elementos necesarios para obtener el tensor de Einstein mediante el uso de *Gravipy*.

Como estamos tomando soluciones en vacío y sin constante cosmológica, las ecuaciones a resolver serán de la forma $G_{\alpha\beta} = 0$, con lo cual únicamente es necesario conocer el tensor de Einstein.

El código del programa desarrollado se muestra a continuación:

```

1 import numpy as np
2 import sympy
3 from sympy import *
4 import sympy as sp
5 sp.init_printing(use_latex='mathjax')
6 from gravipy import *
7
8 # Definimos la coordenadas, funciones, y consantes que apareceran en la
   metrica
9 t, r, q, phi, a, M, Gamma, Sigma = symbols('t, r, theta, phi, a, M,
   Gamma, Sigma')
10 xi = Coordinates('chi', (t,r,q,phi)) # Gravipy representara q como theta
11 nd=4 # Numero de dimensiones
12 Z = sympy.Function('Z')(r)
13 F = sympy.Function('F')(r)
14
15 # Definimos tambien la metrica
16 Metric = Matrix([[(-1+Z/(r**2+q*a**2)),0,0,-(a*(1-q)*Z)/(r**2+q*a**2)
   ],[0,(r**2+q*a**2)/F,0,0],[0,0,(r**2+q*a**2)/(4*q*(1-q)),0],[-(a*(1-q)
   )*Z/(r**2+q*a**2),0,0,(r**2+a**2)*(1-q)+(Z*(a**2)*(1-q)**2)/(r**2+q*
   a**2)]]))
17
18 ndp1=nd+1
19
20 # Calculamos el tensor metrico
21 g = MetricTensor('g', xi, Metric)
22
23 # Una vez se tiene el tensor metrico calculamos los simbolos de la
   conexion
24 Ga = Christoffel('Gamma', g)
25
26 # Tensor de Riemann
27 Rm = Riemann('Rm', g)

```

```

28
29 # Tambien el tensor de Ricci
30 Ri = Ricci('Ri', g)
31
32 # El escalar de Ricci sera necesario para obtener las ecuaciones de
    Einstein
33 R=0
34 for i in range(1,ndp1):
35     R=R+Ri(-i,i)
36
37 # Que quedaran de la siguiente forma
38 G = Einstein('G',Ri )
39 print('\n')
40 print("=====")
41 print("TENSOR DE EINSTEIN")
42 print("=====")
43 print('\n')
44 for i in range (1,ndp1):
45     for j in range (1,ndp1):
46         if G(i,j) != 0:
47             label1 = str(xi(-i))
48             label2 = str(xi(-j))
49             if label1 == 'theta':
50                 label1 = 'q'
51             if label2 == 'theta':
52                 label2 = 'q'
53             print('G(' + label1 + ',' + label2 + ')=')
54             print("\n")
55             sp.pprint(G(i,j))

```


Referencias

- [1] Adler, R. and Bazin, M., and Schiffer, M. (1965). *Introduction to general relativity*. New York: McGraw-Hill.
- [2] Akiyama, Kazunori & Bouman, Katherine & Woody, David. (2019). First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophysical Journal Letters*. **875**.
- [3] B. Mashhoon, F. W. Hehl, and D. S. Theiss (1984). On the gravitational effects of rotating masses: the Thirring-Lense papers. *General Relativity and Gravitation*, **16**(8), 711–750.
- [4] Bhat, M., Dhurandhar, S. & Dadhich, N. (1985). Energetics of the Kerr-Newman black hole by the penrose process. *J. Astrophys. Astr.*, **6**, 85–100.
- [5] Bernagozzi, M. (2013). *A mathematical introduction to Kerr black holes*. PhD thesis, Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Università di Bologna.
- [6] Carter, B. (1971). Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom. *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 331–333.
- [7] Carter, B. (1972). Global structure of the kerr family of gravitational fields. *Phys. Rev.*, **174**, 1559–1571.
- [8] Chandrasekhar, S. (1978). The Kerr Metric and Stationary Axisymmetric Gravitational Fields. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **358**(1965), 405–420.
- [9] Chandrasekhar, S. (1985). *The mathematical theory of black holes*. The International Series of Monographs on Physics, Oxford: Clarendon Press.
- [10] Chou, M. D. Y. (2017). A derivation of the Kerr metric by ellipsoid coordinate transformation. *International Journal of Physical Sciences*, **12**(11), 130–136.
- [11] Deser, S. and Franklin, J. (2010). De/re-constructing the Kerr metric. *Gen. Rel. Grav.* **42**, 2657–2662.
- [12] Einstein, Albert (1915). Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*. 844–847.

- [13] Enderlein, Jörg (1997). A heuristic way of obtaining the Kerr metric. *American Journal of Physics*, **65**(9), 897–902.
- [14] Hawking, S.W. (1972). Black holes in general relativity. *Commun. Math. Phys.*, **25**, 152–166.
- [15] Hawking, S., & Ellis, G. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Cambridge: Cambridge University Press.
- [16] Isi, Maximiliano and Farr, Will M. and Giesler, Matthew and Scheel, Mark A. and Teukolsky, Saul A. (2021). Testing the Black-Hole Area Law with GW150914. *Phys. Rev. Lett.*, **127**:011103.
- [17] Islam, J. (1985). *Rotating Fields in General Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [18] Jaramillo J.L.,ourgoulhon E. (2009). Mass and Angular Momentum in General Relativity. In: Blanchet L., Spallicci A., Whiting B. (eds) Mass and Motion in General Relativity. Fundamental Theories of Physics, vol 162. Springer, Dordrecht.
- [19] James M. Bardeen, William H. Press, and Saul A. Teukolsky (1972). Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation. *The Astrophysical Journal*, **178**, 347–370.
- [20] Jeffrey M. Cohen and F. de Felice (1984). The total effective mass of the kerr–newman metric. *Journal of Mathematical Physics*, **25**(4), 992–994.
- [21] Jeffrey M. Cohen and Harry E. Moses (1977). New test of the synchronization procedure in noninertial systems. *Phys. Rev. Lett.*, **39**, 1641–1643.
- [22] Jost, J. (2011). *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [23] Kerr, Roy P. (1963). Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Phys. Rev. Lett.*, **11**, 237–238.
- [24] Komar, Arthur (1959). Covariant Conservation Laws in General Relativity. *Phys. Rev.*, **113**, 934–936.
- [25] Krasinski, Andrzej (1978). Ellipsoidal space-times, sources for the Kerr metric. *Annals of Physics*, **112**(1), 22–40.

- [26] L. Christodoulou, Demetrios (1971). *Investigations in Gravitational Collapse and the Physics of Black Holes*. PhD thesis, Princeton University.
- [27] Lämmerzahl, C. and Everitt, C.W.F. and Hehl, F.W. (2001). *Gyros, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [28] Lee, John (2012). *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag New York.
- [29] Lightman, A., Press, W., Price, R., & Teukolsky, S. (1975). *Problem Book in Relativity and Gravitation*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- [30] Loinger, A. & Marsico, T. (2010). About the Lense-Thirring and Thirring effects.
- [31] Matt Visser. (2008). *The Kerr spacetime: A brief introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [32] Matthias Blau. (2011). *Lecture Notes on General Relativity*.
- [33] Meinel, R., Ansorg, M., Kleinwächter, A., Neugebauer, G., & Petroff, D. (2008). *Relativistic Figures of Equilibrium*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [34] Michell, J. (1784). On the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. **74**, 35–57.
- [35] Misner, Charles W. and Thorne, K. S. and Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation* W. H. Freeman, San Francisco.
- [36] Modak, S and Samanta, S. (2010). Effective values of komar conserved quantities and their applications. *International Journal of Theoretical Physics*.
- [37] Nakahara, M. (2003). *Geometry, topology and physics*. CRC Press.
- [38] O'Neill, B. (1992). *The Geometry of Kerr Black Holes*. Dover Publications.
- [39] Poisson, E. (2004). *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [40] Reall, Harvey (2011). *Lecture notes: Black holes*.
- [41] Samuel Reich, E. (2013). Spin rate of black holes pinned down. *Nature*, **500**, 135.

- [42] Saul A. Teukolsky. (2015). The Kerr Metric. *Classical and Quantum Gravity*, **32**(12), 124006.
- [43] Schwarzschild, K. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*. 189–196.
- [44] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., & Herlt, E. (2003) *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. (2nd ed., Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Cambridge: Cambridge University Press.
- [45] Tohru Eguchi, Peter Gilkey, and Andrew Hanson (1980). Gravitation, gauge theories and differential geometry. *Physics Reports*, **66**, 213–393.
- [46] Tursunov and N. Dadhich (2019). 50 years of energy extraction from rotating black hole:revisiting magnetic penrose process. *arXiv: High Energy Astrophysical Phenomena*.
- [47] Wald, Robert M. (1984). *General Relativity*. Chicago University Press.